VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Diferenciální rovnice a jejich použití v elektrotechnice

Prof. RNDr. Josef Diblík, DrSc.
Doc. RNDr. Jaromír Baštinec, CSc.
Mgr. Irena Hlavičková
Doc. RNDr. Zdeněk Šmarda, CSc.

ÚSTAV MATEMATIKY

Obsah

Seznam obrázků

1 Vstupní test

Dříve, než se ponoříte do studia diferenciálních rovnic, projděte si následující test. Pokud vám řešení některých úloh bude dělat problémy, je nanejvýš vhodné si příslušné téma zopakovat.

1.1 Příklady vstupního testu

Příklad 1 *Je dána funkce*

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}\,.$$

Vypočtěte
a) $f(2)$, *b)* $f(2t)$, *c)* $f(-x)$.

Příklad 2 *Zderivujte následující funkce jedné proměnné (nemusíte se snažit výsledek jakkoli upravovat)*
a) $y = 2x^3 - \frac{x}{4} + 5 - 3\sqrt{x} - \frac{3}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$, *b)* $y = \mathrm{e}^{-x}\sin 2x$, *c)* $y = \frac{\cos x^2}{x}$, *d)* $y = \frac{1}{\ln(x^2+1)}$.

Příklad 3 *Vypočtěte následující neurčité integrály*
a) $\int (x^2+3x-1)\,\mathrm{d}x$, *b)* $\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$, *c)* $\int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, *d)* $\int t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$, *e)* $\int (2xy-x)\,\mathrm{d}y$ *(pozor na proměnnou!).*

Příklad 4 *Vypočtěte následující určité integrály*
a) $\int_1^2 (2x-1)\,\mathrm{d}x$, *b)* $\int_{x/2}^{x} \cos t\,\mathrm{d}t$.

Příklad 5 *Vypočtěte parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných, na kterých zadaná funkce závisí*
a) $f(x,y) = x^2y^3 - x + y\sin x$, *b)* $g(x,y,z) = \frac{x+y+z^2}{y+1}$.

Příklad 6 *Ověřte, že funkce* $y = \frac{x-5}{x-2}$ *je řešením diferenciální rovnice* $(x-2)y' + y = 1$.

Příklad 7 *Najděte obecné řešení diferenciálních rovnic*
a) $x + yy' = 0$. *b)* $y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2}$.

Příklad 8 *Najděte řešení počáteční úlohy* $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 2$.

Příklad 9 *Najděte obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' + 8y' + 15y = 0$$

a řešení vyhovující počátečním podmínkám $y(0) = 4, y'(0) = 0$.

Příklad 10 *Ověřte, že funkce* $u(x,y) = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$ *splňuje rovnici*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

1.2 Řešení vstupního testu

Př. 1 a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{2t-1}{4t^2+1}$; c) $\frac{-x-1}{x^2+1}$

Př. 2 a) $y' = 6x^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$; b) $y' = -e^{-x}\sin 2x + 2e^{-x}\cos 2x$;
c) $y' = \frac{-2x^2\sin x^2 - \cos x^2}{x^2}$; d) $y' = -\frac{2x}{(x^2+1)\ln^2(x^2+1)}$

Př. 3 a) $\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - x + c$; b) $\ln|x-1| + \frac{1}{x} + c$; c) $-xe^{-x} - e^{-x} + c$; d) $\frac{1}{2}e^{t^2} + c$; $xy^2 - xy + c$

Př. 4 a) 2; b) $\sin x - \sin\frac{x}{2}$

Př. 5 a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 - 1 + y\cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + \sin x$; b) $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{y+1}$, $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1-x-z^2}{(y+1)^2}$,
$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{2z}{y+1}$

Př. 7 a) $y^2 + x^2 = c$; b) $y = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)e^{-x^2}$

Př. 8 $y = \frac{x+2}{\cos x}$

Př. 9 Obecné řešení je $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-5x}$, řešení počáteční úlohy je $y = 4e^{-3x} - 3e^{-5x}$

2 Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

2.1 Cíl kapitoly

Cílem této kapitoly je nenásilně navázat na učivo, se kterým se studenti seznámili již v prvním ročníku bakalářského studia. Nejprve připomeneme některé základní pojmy týkající se diferenciálních rovnic obecně. Pak probereme řešení jednoho speciálního typu diferenciálních rovnic prvního řádu, tzv. exaktních rovnic, a ukážeme postup, kterým se některé rovnice dají na rovnice exaktní převést.

2.2 Malé opakování

Dříve, než se pustíme do probírání nových typů diferenciálních rovnic, bude asi užitečné připomenout, co je to vůbec diferenciální rovnice a jak může vypadat její řešení. Protože se jedná skutečně o pouhé připomenutí, nebudeme zde rozepisovat přesné definice. Ty nechť si čtenář najde např. ve skriptech pro druhý semestr.

Obyčejná diferenciální rovnice je rovnice, ve které se vyskytují derivace nebo diferenciály neznámé funkce (případně více neznámých funkcí) jedné reálné proměnné.
(Na rozdíl od parciální diferenciální rovnice, která obsahuje parciální derivace hledané funkce.)
Obyčejné diferenciální rovnice jsou například

$$xy' + y = \sin x, \tag{r1}$$
$$(x+1)\mathrm{d}x + x(y-1)\mathrm{d}y = 0, \tag{r2}$$
$$y'' + 2y' + y = x. \tag{r3}$$

První dvě rovnice jsou prvního řádu, zatímco třetí rovnice je řádu druhého, protože nejvyšší řád derivace v ní obsažený je 2.
Rovnici obsahující y' lze snadno převést na tvar obsahující diferenciály $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ a naopak. K tomu si stačí uvědomit, že $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Například rovnice (r1) se dá zapsat jako

$$x\mathrm{d}y + (y - \sin x)\mathrm{d}x = 0$$

a rovnice (r2) jako

$$x + 1 + x(y-1)y' = 0.$$

Řešením diferenciální rovnice na daném intervalu I nazýváme funkci, která mění rovnici v identitu, pokud ji dosadíme za neznámou funkci.

Můžete sami ověřit, že řešením rovnice (r1) na libovolném intervalu neobsahujícím nulu je např. funkce $y = -\frac{\cos x}{x}$.
To je ovšem jen jedno z mnoha řešení této rovnice. Z hlediska terminologického nazýváme každé konkrétní řešení **partikulárním řešením**.

Obecné řešení naší rovnice je $y = \frac{1}{x}(c - \cos x)$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. (Opět můžete ověřit nebo – ještě lépe – toto řešení najít výpočtem.) Kterékoli partikulární řešení rovnice (r1) dostaneme z jejího obecného řešení vhodnou volbou konstanty c.

Ne vždy se řešení diferenciální rovnice podaří vyjádřit ve tvaru $y = f(x)$, tj. **explicitně**. Často řešení dostaneme dostaneme v uzavřeném tvaru jako rovnici $F(x, y) = 0$, tj. v tzv. **implicitním** tvaru. Z rovnic, se kterými jste se zatím setkali, je toto běžné u rovnic se separovanými proměnnými, jako je např. (r2). Řešení této rovnice je

$$\frac{y^2}{2} - y + x + \ln|x| + c = 0$$

(opět ověřte nebo řešení přímo najděte).

Na závěr našeho opakování ještě připomeňme, že v praxi obvykle hledáme řešení diferenciální rovnice, které vyhovuje zadané počáteční podmínce

$$y(x_0) = y_0.$$

Při řešení takovéto **počáteční úlohy** pak většinou postupujeme tak, že nejprve najdeme obecné řešení diferenciální rovnice, obsahující parametr c. Jeho konkrétní hodnotu zjistíme dosazením počáteční podmínky do obecného řešení a nalezením c jako kořene vzniklé rovnice.

Jiná část matematiky (numerická matematika) se zabývá, mj., přibližným nalezením řešení diferenciální rovnice, které vyhovuje zadané počáteční podmínce, pomocí různých výpočtových schémat (algoritmů). K nejznámějším algoritmům patří tzv. Eulerova metoda.

2.3 Exaktní rovnice a integrační faktor

Exaktní rovnice jsou speciálním typem obyčejných diferenciálních rovnic, který velmi úzce souvisí s totálním diferenciálem funkce dvou proměnných. Proto nejprve připomeneme, jak totální diferenciál vypadá.

Má-li funkce $z = f(x, y)$ spojité parciální derivace prvního řádu v nějaké oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, pak má v Ω **totální diferenciál** $\mathrm{d}z$, který je roven

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y. \tag{2.1}$$

Příklad 2.1 *Totální diferenciál funkce* $f(x, y) = x^2 y$ *je* $\mathrm{d}f = 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$. *Představme si nyní, že máme řešit diferenciální rovnici*

$$2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0, \quad \textit{tj.} \quad \mathrm{d}f = 0.$$

Tvrdíme, že obecné řešení této rovnice je

$$x^2 y = c \quad \textit{neboli} \quad f(x, y) = c.$$

Nevěříte? Tak se na to znovu podívejme:
Jestliže se omezíme jen na ty body (x, y), pro které je $f(x, y) = c$ ($c \in \mathbb{R}$ je konstanta), pak $\mathrm{d}f = \mathrm{d}c = 0$, tj. rovnice je splněna.
(Jestli ještě pořád nevěříte, vyřešte rovnici sami jiným způsobem – je to rovnice se separovanými proměnnými.)

2.3.1 Definice exaktní rovnice

Viděli jsme, že diferenciální rovnice tvaru $\mathrm{d}f = 0$ má řešení, které se dá pěkně popsat rovnicí $f(x, y) = c$, a proto si tato rovnice zaslouží vlastní jméno:

Definice 2.1 (Exaktní rovnice)
Diferenciální rovnice

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2.2}$$

*se nazývá **exaktní diferenciální rovnice**, jestliže výraz na její levé straně je totálním diferenciálem nějaké funkce f v nějaké oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Funkci f nazýváme **kmenovou funkcí**.*

V příkladu 2.1 jsme měli jednoduchou práci, protože jsme kmenovou funkci f předem znali. To ale rozhodně není typická situace. Proto se nyní budeme zabývat dvěma otázkami:

- Jak poznáme, že je nějaká rovnice exaktní?
- Víme-li už, že exaktní je, jak najdeme kmenovou funkci f, pomocí níž je dáno řešení?

Odpověď na první otázku dává následující věta.

Věta 2.1 *Nechť M a N jsou funkce dvou proměnných, které jsou spojité a mají spojité parciální derivace prvního řádu v nějaké obdélníkové oblasti $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}$, kde a, b, c, d jsou konstanty. Pak výraz*

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce f právě tehdy, když v uvedené oblasti platí

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\,. \tag{2.3}$$

Nebudeme provádět důkaz tohoto tvrzení, ale přesto se u podmínky (2.3) na chvíli zastavíme, abyste viděli, že jen tak „nespadla z nebe“.
Jestliže existuje funkce f, pro kterou platí $\mathrm{d}f = M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y$, znamená to, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

Tedy $\quad \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad$ zatímco $\quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,.$

Protože funkce M a N mají spojité parciální derivace prvního řádu, má funkce f spojité parciální derivace druhého řádu, a tedy musí platit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{neboli} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

Příklad 2.2 *Rozhodněte, zda jsou zadané diferenciální rovnice exaktní.*
a) $2xy\,\mathrm{d}x + (x^2-1)\,\mathrm{d}y = 0$
b) $(\mathrm{e}^{xy} - y)\,\mathrm{d}x + x^2\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = 0$
Řešení:
a) $M(x,y) = 2xy,\ N(x,y) = x^2-1.$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x\,, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \textit{rovnice je exaktní.}$$

b) $M(x,y) = \mathrm{e}^{xy} - y,\ N(x,y) = x^2\mathrm{e}^y.$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x\mathrm{e}^{xy} - 1\,, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x\mathrm{e}^y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \textit{rovnice není exaktní.}$$

2.3.2 Nalezení kmenové funkce

Nyní se zaměříme na problém, jak najít kmenovou funkci f. Postup jejího hledání ukážeme nejprve obecně a pak na několika příkladech.

Mějme diferenciální rovnici

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

o které víme, že je exaktní, tj. že

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

Hledáme funkci f, pro kterou platí

$$\mathrm{d}f = M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \text{neboli} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y).$$

Víme, že derivace f podle x je rovna M, a proto můžeme integrací M podle x (tj. y pro tento moment považujeme za konstantu) f najít:

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x + g(y),$$

kde $g(y)$ je funkce závislá pouze na y, která zde hraje roli integrační konstanty. (Uvědomte si, že když libovolnou funkci závisející pouze na y zderivujeme podle x, dostaneme nulu.)

Na druhou stranu také víme, že derivace f podle y má být rovna $N(x,y)$. To znamená, že

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,\mathrm{d}x + g(y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x + g'(y) = N(x,y).$$

Odtud dostaneme rovnici

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\,, \tag{2.4}$$

ze které zatím neznámou funkci g najdeme integrací podle y. Tím je kmenová funkce f nalezena.

Poznámka 1. Možná se vám zdá divné, že napřed zdůrazňujeme, že funkce g závisí pouze na y, a za chvíli napíšeme, že $g'(y) = N(\mathbf{x},y) - \cdots$. Na příkladech však uvidíte, že v pravé straně rovnice (2.4) se všechny výrazy obsahující x vždy odečtou a zbude tam opravdu pouze funkce proměnné y, občas dokonce jenom konstanta.
Ukážeme nyní, proč tomu tak je. Vypočteme derivaci výrazu na pravé straně (2.4) podle x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\right) &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\right) = \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.\end{aligned}$$

To znamená, že $N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x$ nezávisí na x.

Poznámka 2. Celý postup hledání f se dal provést i z opačného konce. Napřed můžeme vyjádřit f pomocí integrálu z funkce N podle y:

$$f(x,y) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}y + h(x)$$

Pak využijeme toho, že derivace f podle x musí být rovna M. Z toho dostaneme rovnici pro funkci h:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int N(x,y)\,\mathrm{d}y + h(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,\mathrm{d}y + h'(x) = M(x,y),$$

ve které se v tomto případě musí odečíst všechny členy obsahující y.

Příklad 2.3 *Najděte obecné řešení diferenciální rovnice*

$$2xy\,\mathrm{d}x + (x^2-1)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení: *O zadané rovnici již z příkladu (2.2) a) víme, že je exaktní. Existuje proto funkce f, pro niž platí $\mathrm{d}f = 2xy\,\mathrm{d}x + (x^2-1)\,\mathrm{d}y$ neboli*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad a \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1.$$

Z rovnice $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ *integrací podle* x *dostáváme*

$$f(x, y) = x^2y + g(y).$$

Pro tuto funkci f *musí dále platit, že* $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$. *Tedy*

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y + g(y)) = x^2 + g'(y) = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad g'(y) = -1 \quad \Rightarrow \quad g(y) = -y.$$

(Všimněte si, že x^2 *se v rovnici pro* g *opravdu odečetlo, přesně jak jsme v poznámce 1 slibovali.)*
Kmenová funkce f *je tedy* $f(x, y) = x^2y - y$ *a obecné řešení zadané diferenciální rovnice je* $\underline{\underline{x^2y - y = c}}$.

Rovnice v tomto příkladu byla zadána přímo ve tvaru (2.2). Vždycky to tak ale být nemusí.

Příklad 2.4 *Najděte obecné řešení rovnice*

$$y(1 - x^2)y' = xy^2 - \cos x \sin x$$

a pak řešení vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 2$.

Řešení: *Zadaná rovnice není žádného z dříve probraných typů (separovatelná ani lineární). Převedeme ji na tvar* $M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ *a podíváme se, jestli je exaktní:*

$$y(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^2 - \cos x \sin x \quad \Rightarrow \quad (\cos x \sin x - xy^2)\,\mathrm{d}x + y(1 - x^2)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Tedy $M(x, y) = (\cos x \sin x - xy^2)$ *a* $N(x, y) = y(1 - x^2)$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \textit{rovnice je exaktní.}$$

Budeme hledat funkci f, *pro kterou platí*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\cos x \sin x - xy^2) \quad a \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y(1 - x^2).$$

Protože se zdá, že bude pohodlnější integrovat N *podle* y *než* M *podle* x, *použijeme postup naznačený v poznámce 2.*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y(1 - x^2) \quad \Rightarrow \quad f(x, y) = \frac{y^2}{2}(1 - x^2) + h(x).$$

Víme, že derivace f *podle* x *musí být rovna* $M(x, y) = \cos x \sin x - xy^2$. *Tedy*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2}{2}(1 - x^2) + h(x)\right) = -xy^2 + h'(x) = \cos x \sin x - xy^2$$

$$\begin{aligned} \textit{Odtud} \quad h'(x) &= \cos x \sin x, \\ h(x) &= \int \cos x \sin x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} t &=& \sin x \\ \mathrm{d}t &=& \cos x \,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int t \,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}\sin^2 x\,. \end{aligned}$$

Kmenová funkce f *je* $f(x,y) = \frac{y^2}{2}(1-x^2) + \frac{1}{2}\sin^2 x$ *a obecné řešení zadané rovnice je*

$$\frac{y^2}{2}(1-x^2) + \frac{1}{2}\sin^2 x = c_1$$

nebo $\underline{\underline{y^2(1-x^2) + \sin^2 x = c}}, \quad$ *kde* $c = 2c_1$.

Nyní najdeme řešení vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 2$*:*

$$2^2(1-0^2) + \sin^2 0 = c \quad \Rightarrow \quad c = 4.$$

Hledané řešení je $\underline{\underline{y^2(1-x^2) + \sin^2 x = 4}}$.

2.3.3 Integrační faktor

Vraťme se teď k exaktní rovnici, se kterou jsme v příkladu 2.1 začínali, tj.

$$2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0.$$

Při pohledu na ni člověka může napadnout: „Co kdybych ji vydělil x? Tím se přece zjednoduší!“ Učiňme tak:

$$2y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$$

Rovnice je skutečně na pohled jednodušší, ale zato přestala být exaktní.

Pro novou rovnici je $\quad M(x,y) = 2y, \quad N(x,y) = x, \quad$ a tedy $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2 \neq 1 = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Jestliže se původně exaktní rovnice vydělením nějakou funkcí „odexaktněla“, nemohla by neexaktní rovnice vynásobením vhodnou funkcí „zexaktnět“? Pokusme se takovou funkci najít. Označíme ji jako $\mu(x,y)$ a budeme jí říkat **integrační faktor**.
Hledáme tedy funkci $\mu(x,y)$ (předpokládáme $\mu(x,y) \neq 0$), pro kterou by rovnice

$$\mu(x,y)M(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

byla exaktní, tj. pro kterou by platilo

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)M(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)N(x,y)\right).$$

Použitím vzorce pro derivaci součinu dostaneme

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot M + \mu \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot N + \mu\cdot\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.5}$$

Zdá se, že jsme se dostali z bláta do louže. Rovnice (2.5) je parciální diferenciální rovnice pro neznámou funkci μ a vyřešit ji může být stejně obtížné jako vyřešit původní neexaktní obyčejnou diferenciální rovnici. V některých speciálních případech však funkci μ přece jenom najdeme.

2.3.4 Integrační faktor jako funkce jedné proměnné

Pokud předpokládáme, že funkce μ závisí pouze na jedné proměnné, rovnice (2.5) se zredukuje na tvar, se kterým už si poradíme.
Nejprve hledejme funkci závislou pouze na proměnné x, tj. $\mu = \mu(x)$. V tomto případě je $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ a z (2.5) dostaneme

$$\mu(x) \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \mu'(x) \cdot N + \mu(x) \cdot \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \mu'(x) \cdot N = \mu(x) \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

a nakonec $$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,.$$

Aby tato rovnost mohla být splněna, musí výraz na pravé straně záviset také pouze na x, tedy

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \alpha(x)\,.$$

Tím se rovnice (2.5) značně zjednodušila:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \alpha(x)$$

To je rovnice se separovanými proměnnými a jsme schopni ji vyřešit:

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \alpha(x)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|\mu| = \int \alpha(x)\,\mathrm{d}x + c \quad \Rightarrow \quad \mu = c \cdot \mathrm{e}^{\int \alpha(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Protože nám jde o nalezení jedné konkrétní funkce μ, nikoli všech možných, můžeme konstantu c zvolit, např. $c = 1$. Tím máme

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \alpha(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Podobně by se postupovalo při hledání integračního faktoru μ závislého pouze na proměnné y (zkuste si to sami).
To, k čemu jsme zatím dospěli, můžeme shrnout v následující větě.

Věta 2.2 *Nechť je dána rovnice*

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{2.6}$$

Je-li $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \alpha(x)$, *resp.* $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \beta(y)$, *pak vynásobením rovnice* (2.6) *integračním faktorem* $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \alpha(x)\,\mathrm{d}x}$, *resp.* $\mu(y) = \mathrm{e}^{\int \beta(y)\,\mathrm{d}y}$ *, dostaneme rovnici exaktní.*

Integrační faktor lze nalézt i v některých dalších případech, ale o tom zde mluvit nebudeme. Nyní přichází to, na co jste se určitě nejvíc těšili – příklady.

Příklad 2.5 *Najděte obecné řešení rovnice*

$$(xy + y^2 + y)\,\mathrm{d}x + (x + 2y)\,\mathrm{d}y = 0$$

Řešení: *Máme* $\quad M(x,y) = xy + y^2 + y, \quad N(x,y) = x + 2y.$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x + 2y + 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \textit{rovnice není exaktní.}$$

Zkusíme, jestli se nám podaří najít integrační faktor μ *jako funkci pouze proměnné* x*:*

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{x + 2y + 1 - 1}{x + 2y} = 1.$$

Žádné y *se v tomto výrazu po úpravě nevyskytuje, a proto můžeme najít integrační faktor. V našem případě je* $\alpha(x) = 1$*, a tedy*

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int 1\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x.$$

Zadanou rovnici nalezeným integračním faktorem vynásobíme:

$$\mathrm{e}^x(xy + y^2 + y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^x(x + 2y)\,\mathrm{d}y = 0$$

Můžeme se přesvědčit, že tohle už exaktní rovnice je.
Nyní je $\quad M(x,y) = \mathrm{e}^x(xy + y^2 + y), \quad N(x,y) = \mathrm{e}^x(x + 2y).$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \mathrm{e}^x(x + 2y + 1), \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \mathrm{e}^x(x + 2y) + \mathrm{e}^x \cdot 1 = \mathrm{e}^x(x + 2y + 1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Najdeme kmenovou funkci f*. (Pokud jste snad zapomněli, jedná se o funkci, pro kterou platí* $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ *a* $\frac{\partial f}{\partial y} = N$*.) Na první pohled je zřejmé, že bude méně pracné nalézt* f *integrováním* N *podle* y *než integrováním* M *podle* x*.*

$$f(x,y) = \int \mathrm{e}^x(x + 2y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x(xy + y^2) + h(x).$$

Nyní využijeme toho, že musí platit $\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^x(xy + y^2 + y)$*:*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^x(xy + y^2) + h(x)\right) = \mathrm{e}^x(xy + y^2) + \mathrm{e}^x \cdot y + h'(x) = \mathrm{e}^x(xy + y^2 + y) + h'(x)$$

$$\mathrm{e}^x(xy + y^2 + y) + h'(x) = \mathrm{e}^x(xy + y^2 + y) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad h(x) = 0.$$

Kmenová funkce je tedy $f(x,y) = \mathrm{e}^x(xy + y^2)$ *a obecné řešení zadané rovnice je*

$$\underline{\underline{\mathrm{e}^x(xy + y^2) = c.}}$$

Příklad 2.6 *Najděte řešení počáteční úlohy*

$$(2xy^2 - y)\,\mathrm{d}x + (y^2 + x + y)\,\mathrm{d}y = 0, \qquad y(0) = 1.$$

Řešení: *Nejprve najdeme obecné řešení zadané rovnice. Sami se přesvědčte, že rovnice není žádného z dříve probraných typů. Prozkoumáme, jestli existuje integrační faktor jako funkce pouze proměnné x:*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \quad \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{4xy - 2}{y^2 + x + y}\,.$$

Poslední výraz závisí na proměnné y, integrační faktor typu $\mu(x)$ proto nenajdeme. Nyní to zkusíme s $\mu(y)$:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{1 - (4xy - 1)}{2xy^2 - y} = \frac{2(1 - 2xy)}{y(2xy - 1)} = -\frac{2}{y}\,.$$

To je funkce pouze proměnné y a integrační faktor $\mu(y)$ je proto

$$\mu(y) = \mathrm{e}^{\int -\frac{2}{y}\,\mathrm{d}y} = \mathrm{e}^{-2\ln|y|} = \mathrm{e}^{\ln y^{-2}} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}\,.$$

(Jestli teď užasle hledíte na úpravy provedené při výpočtu $\mu(y)$, osvěžte si prosím v paměti, že $\mathrm{e}^{\ln x} = x$ pro $x > 0$.)

Rovnice vynásobená integračním faktorem $\mu(y)$ je

$$\left(2x - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x + \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = 0.$$

Ověřte sami, že se jedná o rovnici exaktní (tím v podstatě uděláte zkoušku, že jsme se při hledání integračního faktoru nedopustili žádné chyby).

Budeme hledat kmenovou funkci f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \int \left(2x - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x = x^2 - \frac{x}{y} + g(y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - \frac{x}{y} + g(y)\right) = \frac{x}{y^2} + g'(y) = 1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}$$

$$g'(y) = 1 + \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad g(y) = y + \ln|y|$$

Kmenová funkce je $f(x,y) = x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y|$ a obecné řešení zadané rovnice je

$$x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y| = c.$$

Najdeme konstantu c tak, aby řešení vyhovovalo podmínce $y(0) = 1$:

$$0^2 - \frac{0}{1} + 1 + \ln 1 = c \quad \Rightarrow \quad c = 1.$$

Řešení zadané počáteční úlohy je tedy

$$\underline{\underline{x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y| = 1.}}$$

2.4 Shrnutí kapitoly

V této kapitole jsme nejprve připomněli, jak vypadá diferenciální rovnice, co je jejím řešením, jak může řešení vypadat a jaký je rozdíl mezi obecným a partikulárním řešením dané diferenciální rovnice. Dále jsme se věnovali tzv. exaktním rovnicím. Ukázali jsme, jak poznáme, jestli je nějaká rovnice exaktní, a jak takovou rovnici vyřešit. Nakonec jsme se zabývali problémem, jak rovnici, která původně exaktní není, na exaktní rovnici převést. Předvedli jsme, že rovnice, které vyhovují určitým podmínkám, lze vynásobením tzv. integračním faktorem na exaktní rovnici upravit.

2.5 Cvičení

Příklad 1 *U každé rovnice rozhodněte, zda je exaktní. Pokud ano, najděte její obecné řešení.*

a) $(2x-1)\,\mathrm{d}x + (3y+7)\,\mathrm{d}y = 0$

b) $(\sin y - y\sin x)\,\mathrm{d}x + (\cos x + x\cos y - y)\,\mathrm{d}y = 0$

c) $(x+y)(x-y)\,\mathrm{d}x + x(x-2y)\,\mathrm{d}y = 0$

d) $\dfrac{2x}{y}\,\mathrm{d}x - \dfrac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y = 0$

e) $(1-2x^2-2y)y' = 4x^3+4xy$

f) $\left(1+\ln x + \dfrac{x}{y}\right)\mathrm{d}x = (1+\ln x)\,\mathrm{d}y$

Řešení. a) $x^2 - x + \dfrac{3}{2}y^2 + 7y = c$; b) $x\sin x + y\cos x - \dfrac{1}{2}y^2 = c$; c) není exaktní
d) $\dfrac{x^2}{y} = c$; e)$-x^4 - 2x^2y + y - y^2 = c$; f) není exaktní

Příklad 2 *Najděte řešení počátečních úloh*

a) $(\mathrm{e}^x + y)\mathrm{d}x + (2 + x + y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = 0,\ y(0) = 1$

b) $\dfrac{3y^2 - x^2}{y^5}\,y' + \dfrac{x}{2y^4} = 0,\ y(1) = 1$

Řešení. a) $\mathrm{e}^x + xy + 2y + y\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^y = 3$; b) $\dfrac{x^2}{4y^4} - \dfrac{3}{2y^2} = -\dfrac{5}{4}$

Příklad 3 *Najděte hodnotu konstanty k, pro kterou bude zadaná rovnice exaktní*
$(y^3 + kxy^4 - 2x)\,\mathrm{d}x + (3xy^2 + 20x^2y^3)\,\mathrm{d}y = 0$

Řešení. $k = 10$

Příklad 4 *Najděte integrační faktor, pomocí nějž lze zadanou rovnici převést na rovnici exaktní. Pak najděte obecné řešení rovnice.*

a) $6xy\,\mathrm{d}x + (4y + 9x^2)\,\mathrm{d}y = 0$
b) $(xy + y^2 + y)\,\mathrm{d}x + (x + 2y)\,\mathrm{d}y = 0$

Řešení. a) $\mu(y) = y^2$, obecné řešení je $3x^2y^3 + y^4 = c$
b) $\mu(x) = \mathrm{e}^x$, obecné řešení je $xy\mathrm{e}^x + y^2\mathrm{e}^x = c$

3 Některé typy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

3.1 Cíl kapitoly

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s některými vybranými typy diferenciálních rovnic, jmenovitě s rovnicí Bernoulliovou, Riccatiovou a Clairoutovou, a předvést řešení diferenciálních rovnic pomocí Picardovy metody postupných aproximací.

3.2 Bernoulliova rovnice

Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = a(x)y + b(x)y^n, \tag{3.1}$$

kde $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$ a $n \neq 1$ se nazývá **Bernoulliova rovnice**. Je-li n rovno 1 nebo 0, jde vždy o lineární diferenciální rovnice. Jejich řešení již umíme najít.)
Všimněte si, že pro $n > 0$ má rovnice vždy tzv. triviální řešení $y = 0$.

Rovnici (3.1) můžeme řešit různými metodami. Lze např. použít substituci za y^{1-n}, ale my zde předvedeme jiný způsob, který by vám měl být povědomý.

Nejprve vyřešíme homogenní lineární rovnici

$$y' = a(x)y. \tag{3.2}$$

Obecné řešení této rovnice vyjde ve tvaru $y = C \cdot y_0(x)$, kde

$$y_0(x) = \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}.$$

Řešení původní rovnice (3.1) pak budeme hledat ve tvaru

$$y = C(x) \cdot y_0(x).$$

Připomíná vám to něco? Ano, podobně vypadá metoda variace konstant, používaná při řešení lineárních diferenciálních rovnic.
Ukážeme, že tato cesta skutečně dovede k cíli, tj. že se nám podaří najít funkci $C(x)$, pro kterou je $y = C(x) \cdot y_0(x)$ řešením zadané rovnice. Dosadíme předpokládané řešení do rovnice (3.1):

$$C'(x) \cdot y_0(x) + C(x) \cdot y_0'(x) = a(x) \cdot C(x) \cdot y_0(x) + b(x) \cdot C^n(x) \cdot y_0^n(x). \tag{3.3}$$

Nyní si uvědomme, že $y_0(x)$ je řešením rovnice (3.2), a proto platí $y_0'(x) = a(x) \cdot y_0(x)$. Druhý člen na levé straně rovnice (3.3) je proto roven prvnímu členu na pravé straně a z rovnice nakonec zbude

$$C'(x) = b(x) \cdot C^n(x) \cdot y_0^{n-1}(x),$$

což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými pro neznámou funkci $C(x)$.

Příklad 3.1 *Najděte obecné řešení rovnice*

$$y' = -\frac{y}{x} + xy^2$$

Řešení: *Jedná se o Bernoulliovu rovnici s $n = 2$. Nejprve vyřešíme homogenní lineární rovnici $y' = -\frac{y}{x}$:*

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln c \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\frac{c}{|x|} \quad \Rightarrow \quad y = C \cdot \frac{1}{x}.$$

Řešení zadané rovnice budeme hledat jako $y = C(x) \cdot \frac{1}{x}$. Dosazením tohoto řešení do rovnice dostaneme

$$C' \cdot \frac{1}{x} + C \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{C \cdot \frac{1}{x}}{x} + x \cdot C^2 \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad C' = C^2.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými, kterou nyní vyřešíme.

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = C^2 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}C}{C^2} = \int \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{C} = x + k \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{x+k}.$$

Jednoparametrické řešení naší rovnice je tedy

$$y = -\frac{1}{x+k} \cdot \frac{1}{x} \qquad \text{neboli} \qquad \underline{\underline{y = -\frac{1}{x^2 + kx}}}.$$

Navíc má rovnice ještě tzv. singulární řešení $y = 0$, které z výše uvedeného parametrického řešení nedá získat žádnou volbou konstanty k.

3.3 Riccatiova rovnice

Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{3.4}$$

se nazývá **Riccatiova rovnice**.

Zde asi zažijí trpké zklamání ti, kdo ještě věřili, že každou rovnici (nebo aspoň každou, která se nějak jmenuje) lze analyticky vyřešit. U Riccatiovy rovnice se to podaří jen někdy. (Slovem „vyřešit“ zde myslíme najít řešení vyjádřené pomocí elementárních funkcí nebo aspoň pomocí integrálů z nich.)
Známe-li jedno řešení rovnice (3.4) (např. podaří-li se nám je nějak uhodnout), použitím substituce

$$y = y_1 + u,$$

kde y_1 je ono jedno známé řešení, převedeme Riccatiho rovnici na Bernoulliho rovnici. Předveďme to podrobněji. Dosadíme do rovnice (3.4):

$$\begin{aligned} y_1' + u' &= P(x) + Q(x)(y_1 + u) + R(x)(y_1 + u)^2 \\ y_1' + u' &= P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2 + Q(x)u + R(x)(2y_1u + u^2). \end{aligned}$$

Protože y_1 je řešení rovnice (3.4), platí $y_1' = P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2$, a tedy

$$u' = (Q(x) + 2R(x)y_1)u + R(x)u^2. \tag{3.5}$$

To je Bernoulliova rovnice pro $n = 2$ s neznámou funkcí u, a tu už vyřešit umíme (nenarazíme-li na potíže při výpočtu integrálů, ale to už je jiná otázka).

Příklad 3.2 *Najděte obecné řešení rovnice*

$$y' = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}\,y + y^2,$$

víme-li, že řešením této rovnice je funkce $y_1 = 2/x$.

Řešení: *To, že y_1 je skutečně řešením zadané rovnice, ověřte sami.*
Zavedeme substituci

$$y = \frac{2}{x} + u.$$

V našem případě je $P(x) = -4/x^2$, $Q(x) = -1/x$ a $R(x) = 1$ a rovnice (3.5) bude vypadat takto:

$$u' = \left(-\frac{1}{x} + 2\cdot\frac{2}{x}\right)u + u^2, \qquad \textit{po snadné úpravě} \qquad u' = \frac{3}{x}\,u + u^2.$$

Vzniklou Bernoulliovu rovnici vyřešíme. Nejprve najdeme obecné řešení lineární homogenní rovnice $u' = \dfrac{3}{x}\,u$:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad \ln|y| = 3\ln|x| + \ln c \quad\Rightarrow\quad \ln|y| = \ln\left(c\,|x|^3\right) \quad\Rightarrow\quad u = Cx^3\,.$$

Řešení Bernoulliovy rovnice nyní budeme hledat jako $y = C(x)\cdot x^3$. Zderivováním a dosazením do rovnice dostaneme

$$C'(x)x^3 + C(x)3x^2 = \frac{3}{x}\,C(x)x^3 + C^2(x)x^6 \quad\Rightarrow\quad C'(x) = C^2(x)x^3.$$

Vzniklou rovnici s neznámou funkcí C vyřešíme:

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = C^2x^3 \quad\Rightarrow\quad \int\frac{\mathrm{d}C}{C^2} = \int x^3\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{C} = \frac{x^4}{4} + k \quad\Rightarrow\quad C = -\frac{1}{\dfrac{x^4}{4} + k}\,.$$

C můžeme ještě upravit – čitatele i jmenovatele vynásobíme čtyřmi:

$$C = -\frac{4}{x^4 + 4k} = -\frac{4}{x^4 + K}, \qquad \textit{kde } K = 4k.$$

Řešení Bernoulliovy rovnice je tedy $u = -\dfrac{4}{x^4 + K}\cdot x^3$ (navíc máme ještě singulární řešení $u = 0$.)
Nyní se vrátíme k zadané Riccatiho rovnici. Její řešení je

$$y = \frac{2}{x} + u = \frac{2}{x} - \frac{4x^3}{x^4 + K} = \frac{2(x^4 + K) - 4x^4}{x(x^4 + K)}, \qquad \textit{tj.} \quad \underline{\underline{y = 2\,\frac{K - x^4}{x(x^4 + K)}}}\,.$$

Můžete si všimnout, že ze zadání známé řešení $y_1 = 2/x$ z obecného řešení nedostaneme pro žádné K; toto řešení odpovídá singulárnímu řešení $u = 0$.

3.4 Clairautova rovnice

Všechny rovnice, které jsme dosud probírali, se daly převést na tvar $y' = f(x, y)$. U Clairautovy rovnice je tomu v jistém smyslu naopak – nemáme vyjádřenou derivaci neznámé funkce pomocí x a y, ale y pomocí x a y', a to konkrétně takto:

$$y = xy' + f(y'). \tag{3.6}$$

Poněkud neobvyklého tvaru rovnice se nemusíte lekat. Uvidíte, že řešení Clairautovy lze najít vcelku bezpracně.
Ukážeme, že řešeními Clairautovy rovnice jsou všechny přímky tvaru

$$y = cx + f(c), \tag{3.7}$$

kde c je libovolná konstanta.
Abychom ověřili, že (3.7) je skutečně řešením rovnice (3.6), dosadíme do levé a pravé strany této rovnice. To je velmi jednoduché, ale pro všechny méně zběhlé raději zdůrazněme, že při výpočtu y' derivujeme podle x a že $f(c)$ je konstanta. Proto $y' = (cx + f(c))' = c$.
A teď už dosaďme:

$$L = y = cx + f(c), \quad P = xy' + f(y') = xc + f(c) \quad \Rightarrow \quad L = P.$$

Rovnice (3.6) může mít ještě další řešení, které je vyjádřené parametricky:

$$x = -f'(t), \quad y = f(t) - tf'(t). \tag{3.8}$$

Prověříme, že (3.8) je opravdu řešením. Nejprve najdeme (za předpokladu, že $f''(t) \neq 0$)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{f'(t) - f'(t) - tf''(t)}{-f''(t)} = t.$$

Nyní je levá strana L rovnice (3.6) vyjádřena s pomocí (3.8) jako

$$L = f(t) - tf'(t)$$

a pravá strana P rovnice (3.6) je rovna

$$P = -f'(t)t + f(t) = L.$$

Naše prověrka je zakončena.
Toto řešení je singulární, protože jestliže $f''(t) \neq 0$, řešení (3.8) nedostaneme z řešení (3.7) pro žádnou volbu konstanty c.

Příklad 3.3 *Najděte řešení rovnice*

$$y = xy' + \frac{1}{2}(y')^2 .$$

Řešení: *V našem případě je $f(y') = (1/2)(y')^2$. To znamená, že řešením je každá přímka tvaru*

$$\underline{\underline{y = cx + \frac{1}{2}c^2}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

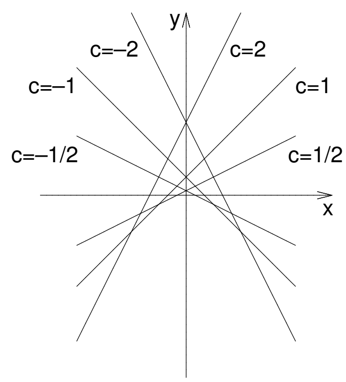
Nyní najdeme řešení typu (3.8). Protože $f(t) = (1/2)t^2$, je $f'(t) = t$, a tedy další řešení zadané rovnice je

$$x = -t, \quad y = \frac{1}{2}t^2 - t \cdot t = -\frac{1}{2}t^2$$

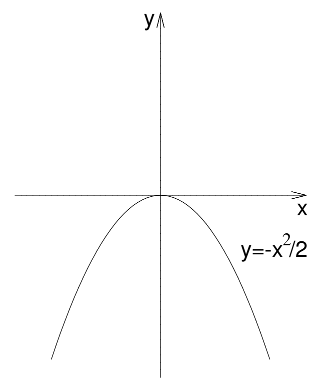
Parametr t se nám podaří vyloučit a řešení tak dostaneme vyjádřené „normálně“:

$$x = -t \quad \Rightarrow \quad t = -x \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}(-x)^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = -\frac{1}{2}x^2}}.$$

Tohle řešení mezi přímky skutečně nepatří. Na obrázcích 3.1 a 3.2 vidíme, že přímky tvoří jakýsi obal singulárního řešení.



Obrázek 3.1: Několik přímkových řešení rovnice z příkladu 3.3



Obrázek 3.2: Singulární řešení rovnice z příkladu 3.3

3.5 Picardova metoda postupných aproximací

V poslední části této kapitoly si ukážeme metodu, která má větší význam teoretický, než že by se pomocí ní skutečně našlo řešení konkrétní diferenciální rovnice.
Snad si ještě pamatujete z numerických metod, že při řešení rovnic $f(x) = 0$ se dala použít metoda, která spočívala v tom, že se rovnice převedla na tvar $x = g(x)$, nějak se odhadla počáteční aproximace řešení x_0 a pak se pořád dokola dosazovalo do vzorce $x_n = g(x_{n-1})$.
Ti zdatnější si možná dokonce vzpomenou, že tento postup, odborně zvaný iterační proces, byl použitelný v daleko obecnějším měřítku než jen pro řešení jedné nelineární rovnice. A zde, možná trochu překvapivě, se s ním znovu setkáme.
Budeme se zabývat řešením počáteční úlohy

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{3.9}$$

Rovnici zintegrujeme od x_0 do x:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} y'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \big[y(t)\big]_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \\ y(x) - y(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

a nakonec dostáváme

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t. \tag{3.10}$$

To je integrální rovnice, která je s původní diferenciální rovnicí ekvivalentní a která je jakousi analogií onoho $x = g(x)$ z před chvílí připomenuté iterační metody.
Nyní zvolíme počáteční aproximaci řešení $y_0(x)$. Obvykle to bývá konstantní funkce $y_0(x) = y_0$. Další aproximaci řešení vypočteme tím způsobem, že $y_0(x)$ dosadíme do pravé strany (3.10):

$$y_1(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,\mathrm{d}t$$

a další aproximace budeme počítat analogicky podle vzorce

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.11}$$

Tím dostáváme posloupnost funkcí $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$, která za jistých předpokladů o funkci f stejnoměrně konverguje (na jistém intervalu) k řešení rovnice (3.10), které je ovšem současně řešením původní diferenciální rovnice (3.9). Tento způsob hledání řešení se nazývá **Picardova metoda postupných aproximací**.

Příklad 3.4 *Picardovou metodou postupných aproximací řešte počáteční problém*

$$y' = y - 1, \quad y(0) = 2.$$

Řešení: *V našem případě je $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ a $f(t, y(t)) = y(t) - 1$. Jako počáteční aproximaci zvolíme $y_0(x) = 2$ a vypočteme několik dalších aproximací:*

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= 2 + \int_0^x (2-1)\,\mathrm{d}t = 2 + \int_0^x \mathrm{d}t = 2 + [t]_0^x = 2 + x \\
y_2(x) &= 2 + \int_0^x (2+t-1)\,\mathrm{d}t = 2 + \int_0^x (1+t)\mathrm{d}t = 2 + \left[t + \tfrac{1}{2}\,t^2\right]_0^x = 2 + x + \tfrac{1}{2}\,x^2 \\
y_3(x) &= 2 + \int_0^x (1 + t + \tfrac{1}{2}\,t^2)\,\mathrm{d}t = 2 + x + \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{2\cdot 3}\,x^3 \\
y_4(x) &= 2 + \int_0^x (1 + t + \tfrac{1}{2}\,t^2 + \tfrac{1}{2\cdot 3}\,t^3)\,\mathrm{d}t = 2 + x + \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{2\cdot 3}\,x^3 + \tfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\,x^4\,.
\end{aligned}$$

Indukcí lze dokázat (odvážnější nechť se o to pokusí), že n-tý člen posloupnosti postupných aproximací je

$$y_n(x) = 2 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,.$$

To znamená, že limita $y_n(x)$ pro n jdoucí do nekonečna je $y(x) = 1 + \mathrm{e}^x$. (Pro všechny, kterým je tento závěr nejasný: Vzpomeňte si na rozvoj funkce $y = \mathrm{e}^x$ do mocninné řady.) Můžeme se přesvědčit, že funkce $y = 1 + \mathrm{e}^x$ je řešením zadané počáteční úlohy:

$$L = y' = (1 + \mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \quad P = y - 1 = \mathrm{e}^x \quad \text{a navíc} \quad y(0) = 1 + \mathrm{e}^0 = 2.$$

Po zhlédnutí tohoto příkladu se možná některým z vás v hlavě honí něco jako: „Proč to dělat jednoduše, když to jde složitě...“ Nutno přiznat, že máte do značné míry pravdu. Zadaná rovnice se dala vyřešit daleko pohodlněji. Cílem příkladu však ani tak nebylo vyřešit onu rovnici, jako spíš předvést nedůvěřivému čtenáři, že metoda skutečně funguje. Že není zrovna pohodlná, to jsme viděli i na našem velmi jednoduchém příkladu. V případě složitější pravé strany se může výpočet integrálů brzy velmi zkomplikovat a rozeznat funkci, ke které posloupnost postupných aproximací konverguje, to už se vůbec podaří jen výjimečně.
Teď už se asi ptáte všichni: „A na co ta metoda tedy je?“ Tahle otázka – zvlášť, je-li vyslovena s určitou intonací – dokáže občas rozezlit i jinak vlídného pedagoga. (Před nevlídnými pedagogy nebývá pro jistotu nahlas vyřčena.) Tady se vám však odpovědi dostane. Picardova metoda je jedním z hlavních nástrojů pro důkaz věty o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice, kterou zde nyní připomeneme. Tohle je, konec konců, kurs pro starší a pokročilé, tak proč neukázat i trošku teorie.

Věta 3.1 (Picardova) *Nechť je funkce f spojitá vzhledem k proměnným x a y na oblasti*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\},$$

kde a, b jsou kladné konstanty, a nechť f na této oblasti vyhovuje Lipschitzově podmínce vzhledem k proměnné y (tj. existuje konstanta L taková, že platí

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L \cdot |y - z|$$

pro libovolné dva body $(x, y), (x, z) \in D$).
Pak má počáteční úloha

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

právě jedno řešení.

Důkaz (ne, nebojte se, nebudeme ho provádět) je založen právě na použití Picardovy posloupnosti postupných aproximací. Ukáže se, že za uvedených předpokladů tato posloupnost konverguje a její limitou je právě jediné řešení zkoumané počáteční úlohy.

3.6 Shrnutí kapitoly

V této kapitole jsme analyzovali tři typy význačných diferenciálních rovnic: Bernoulliovu, Riccatiovu a Clairotovu. Nejdůležitější poznatky z této kapitoly jsou:

1. Bernoulliho rovnice se řeší podobně jako rovnice lineární. Nejprve najdeme obecné řešení odpovídající homogenní rovnice a pomocí něj pak i řešení samotné Bernoulliho rovnice.

2. Známe-li jedno partikulární řešení y_1 Riccatiho rovnice, můžeme tuto rovnici pomocí substituce $y = y_1 + u$ převést na Bernoulliho rovnici.

3. Clairautova rovnice se svým tvarem odlišuje od všech zatím probraných typů rovnic. Její řešení však najdeme snadno. Jsou to všechny přímky tvaru $y = cx + f(c)$. Navíc existuje ještě řešení, které lze vyjádřit parametricky pomocí vztahů (3.8).

V závěru kapitoly jsme popsali Picardovu metodu postupných aproximací. Tato metoda slouží především jako nástroj pro důkaz věty o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic.

3.7 Cvičení

Příklad 1 *Najděte obecné řešení Bernoulliho rovnice* $xy' + y = \dfrac{1}{y^2}$.

Řešení. Mezivýsledek: řešení odpovídající lineární rovnice je $y_0(x) = c/x$. Obecné řešení zadané rovnice je $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^3+c}}{x}$, což lze přepsat např. jako $y^3 = 1 + cx^{-3}$.

Příklad 2 *Najděte řešení Bernoulliho rovnice* $y' - y = \mathrm{e}^x y^2$, *které vyhovuje podmínce* $y(0) = 1$.

Řešení. Mezivýsledky: řešení odpovídající lineární rovnice je $y_0(x) = c\mathrm{e}^x$, obecné řešení zadané rovnice je

$$y = -\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}/2 + c}\,,$$

což lze přepsat např. jako $y = -2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{2x} + k)^{-1}$.
Řešení počáteční úlohy je

$$y = -\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - 3}\,.$$

Příklad 3 *Najděte obecné řešení Riccatiho rovnice* $y' = -2 - y + y^2$, *víme-li, že jedno řešení této rovnice je* $y_1 = 2$.

Řešení. Mezivýsledek: Bernoulliho rovnice vzniklá substitucí $y = u + 2$ je $u' = 3u + u^2$. Obecné řešení zadané rovnice je

$$y = 2 - \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}/3 + c}$$

a lze ho přepsat např. jako

$$y = 2 - \frac{3\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x} + k}\,.$$

Příklad 4 *Najděte obecné řešení Riccatiho rovnice*

$$y' = 2x^2 + \frac{1}{x}\,y - 2y^2,$$

víme-li, že jedno řešení této rovnice je $y_1 = x$.

Řešení. Mezivýsledek: Bernoulliho rovnice vzniklá substitucí $y = u + x$ je

$$u' = (\frac{1}{x} - 4x)u - 2u^2.$$

Obecné řešení zadané rovnice je

$$y = x - \frac{x\mathrm{e}^{-2x^2}}{\mathrm{e}^{-2x^2}/2 + c}.$$

Příklad 5 *Vyřešte Clairautovu rovnici $y = xy' - (y')^3$. Najděte i singulární řešení.*

Řešení. $y = cx - c^3$; singulární řešení vyjádřené parametricky je $x = 3t^2, y = 2t^3$, odtud

$$y = 2\sqrt{\frac{x^3}{27}}.$$

Příklad 6 *Vyřešte Clairautovu rovnici $xy' - y = \mathrm{e}^{y'}$. Najděte i singulární řešení. Najděte řešení vyhovující podmínce $y(0) = -2$.*

Řešení. $y = cx - \mathrm{e}^c$; singulární řešení vyjádřené parametricky je $x = \mathrm{e}^t, y = -\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t$, odtud $y = -x + x\ln x$. Řešení počáteční úlohy je $y = x\ln 2 - 2$.

Příklad 7 *Picardovou metodou najděte první tři aproximace řešení počáteční úlohy $y' = -y$, $y(0) = 1$. Určete limitu posloupnosti $\{y_n(x)\}$ pro $n \to \infty$ a ověřte, že tato limita je řešením počáteční úlohy.*

Řešení.

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - x, \\ y_2(x) &= 1 - x + \frac{x^2}{2}, \\ y_3(x) &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}, \\ y_n(x) &\to \mathrm{e}^{-x} \quad \text{pro} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

4 Lineární systémy obyčejných diferenciálních rovnic

4.1 Cíl kapitoly

V této kapitole budeme hovořit o lineárních systémech obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. S tímto tématem jste se již mohli setkat ve druhém nebo třetím ročníku v předmětu *Vybrané partie z matematiky*. Protože však nelze počítat s tím, že tento předmět (nebo jemu podobný na jiné škole) absolvovali všichni, některé věci zde budou zopakovány. Jde zejména o pravidla pro počítání s vektory a s maticemi a o připomenutí konstrukce obecného řešení lineární homogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Uvedeme některé poznatky o tzv. struktuře obecného řešení lineárních systémů. Ukážeme, že má smysl zavést tzv. fundamentální matici, která má jednotlivé sloupce tvořené pomocí řešení systému. Dále předvedeme metodu řešení těchto systémů pomocí tzv. exponenciály matice. V závěru kapitoly zapíšeme vzorce pro řešení jednotlivých typů počátečních úloh pro systémy lineárních diferenciálních rovnic.

4.2 Malé opakování o maticích a vektorech

Tato kapitola je možná zbytečná. Po pravdě řečeno, všichni doufáme, že JE zbytečná. Že následující věci jsou pro každého studenta naprosto samozřejmé. Ale jeden nikdy neví .... Každopádně byste tuhle kapitolu měli alespoň rychle proběhnout, byť jen třeba proto, abyste si v duchu odfajfkovali „tohle vím“, „tohle taky vím“, atd.

V prvním semestru se vám **matice A** typu $m \times n$ definovala jako obdélníková tabulka čísel

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

V maticích se však nemusí vyskytovat pouze čísla. Jak v dalším textu uvidíte, prvky matic mohou být např. i funkce.
Nyní na příkladu připomeneme základní operace s maticemi.

Příklad 4.1 *Jsou dány matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad a \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $3\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{AB}$.
Řešení: Součet *dvou matic stejného typu je matice, jejíž složky jsou součty odpovídajících složek sčítaných matic:*

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+4 & -1+0 \\ 3+5 & 2+(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Násobek *matice* ***konstantou*** *získáme tak, že každý prvek matice touto konstantou vynásobíme:*

$$3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Součin *matic* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *získáme o něco složitějším způsobem. Prvek, který je v i-tém řádku a j-tém sloupci výsledné matice, dostaneme jako skalární součin i-tého řádku matice* $\mathbf{A}$ *s j-tým sloupcem matice* $\mathbf{B}$ *(na řádky či sloupce matic se můžeme dívat jako na vektory, proto můžeme mluvit o jejich skalárním součinu). Ve výpočtu je zvýrazněn vznik prvku ve druhém řádku a prvním sloupci:*

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \boxed{3 \quad 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}4\\5\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\-6\end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + (-1)\cdot 5 & 1\cdot 0 + (-1)\cdot(-6) \\ \boxed{3\cdot 4 + 2\cdot 5} & 3\cdot 0 + 2\cdot(-6) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 22 & -12 \end{pmatrix}$$

U násobení matic ještě chvíli zůstaneme. V této kapitole se bude velmi často vyskytovat násobek matice se sloupcovým vektorem, který můžeme považovat za matici s jediným sloupcem.

Příklad 4.2 *Vypočtěte součin matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

s vektorem $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$

Řešení: *Všimli jste si toho* $^{\mathrm{T}}$ *u vektoru* $\mathbf{x}$*? Jestli ne, tak se znovu podívejte, bez něho by totiž tento příklad neměl řešení. Tohle* $^{\mathrm{T}}$ *znamená, že matici* (x_1, x_2, x_3) *budeme* ***transponovat*** *neboli zaměníme řádky a sloupce – v tomto případě se z jediného řádku stane jediný sloupec. Kdyby vektor* $\mathbf{x}$ *byl řádkový, s maticí* $\mathbf{A}$ *bychom jej vůbec nemohli vynásobit.*

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 4x_1 + 2x_3 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}.$$

Teď se ještě podíváme, co se stane, vynásobíme-li maticí součet dvou vektorů, resp. konstantní násobek nějakého vektoru. O tomhle určitě také byla v prvním semestru řeč, ale v hektické atmosféře předmětu „Matematika 1“ bakalářského studia tato velmi důležitá věc mohla poněkud zapadnout.

Příklad 4.3 *Vypočtěte součin matice* $\mathbf{A}$ *z předchozího příkladu s vektorem* $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ *a s vektorem* $-2\mathbf{x}$*, kde* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ *a* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1+y_1)+3(x_2+y_2)-(x_3+y_3) \\ 4(x_1+y_1)+2(x_3+y_3) \\ -3(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+5(x_3+y_3) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2x_1+3x_2-x_3 \\ 4x_1+2x_3 \\ -3x_1+x_2+5x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1+3y_2-y_3 \\ 4y_1+2y_3 \\ -3y_1+y_2+5y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{Ax}+\mathbf{Ay}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(-2\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \\ -2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-2x_1)+3(-2x_2)-(-2x_3) \\ 4(-2x_1)+2(-2x_3) \\ -3(-2x_1)+(-2x_2)+5(-2x_3) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -2(2x_1+3x_2-x_3) \\ -2(4x_1+2x_3) \\ -2(-3x_1+x_2+5x_3) \end{pmatrix} = -2\mathbf{Ax}.
\end{aligned}$$

V předchozím příkladu jsme pracovali s konkrétní maticí typu 3×3 a s konkrétní konstantou -2. Kdybychom výpočet provedli s obecnou maticí typu $n \times n$, vektory $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ a konstantou c, dalo by nám to sice trochu víc psaní (nebo možná naopak trochu míň, kdybychom se pokusili čtenáře zmást použitím sumačních znamení), ale zato by se pak mohlo říct, že jsme provedli důkaz tvrzení, že

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{Ax}+\mathbf{Ay} \tag{4.1}$$

$$\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c(\mathbf{Ax}). \tag{4.2}$$

Tento fakt si připomeneme, až se budeme zabývat strukturou řešení homogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic.

Dále bude vhodné připomenout **lineární závislost a nezávislost vektorů**. Opět to bude jen na příkladech, přesné definice si najděte sami.

Příklad 4.4 *Rozhodněte, zda jsou vektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *a* $\mathbf{w}$ *lineárně závislé nebo nezávislé.*
a) $\mathbf{u} = (1,2,3), \mathbf{v} = (1,1,1), \mathbf{w} = (11,12,13)$
b) $\mathbf{u} = (1,2,3), \mathbf{v} = (0,1,1), \mathbf{w} = (-1,0,3)$
Řešení:
a) K závěru bychom sice mohli dojít výpočtem, ale zde se dá uhodnout: Vektory jsou lineárně závislé, protože $\mathbf{w} = \mathbf{u} + 10\mathbf{v}$. *(Takovéto uhodnutí je někdy cennější než výpočet stylem „cvičená opice“, protože je z něj vidět, že člověk ví, co je to lineární závislost.)*
b) Tady řešení na první pohled vidět není, proto budeme počítat. Nejpohodlnější asi bude vypočítat determinant matice, jejíž řádky jsou zadané vektory, a podívat se, vyjde-li nula (lin. závislost), nebo něco nenulového (lin. nezávislost).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot(-1) + 3\cdot 0\cdot 0 - 3\cdot 1\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 3 = 4 \neq 0.$$

Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *a* $\mathbf{w}$ *jsou tedy lineárně nezávislé.*

Když už byla řeč o determinantu, připomeňme ještě, že čtvercová matice, jejíž determinant je nenulový, se nazývá **regulární**, zatímco matice s nulovým determinantem je **singulární**. Je-li matice $\mathbf{A}$ regulární, existuje matice k ní inverzní, kterou značíme $\mathbf{A}^{-1}$. To je matice, jejíž součin s maticí původní dá jednotkovou matici. Jak se inverzní matice počítá, případně co je to jednotková matice (pokud jste snad zapomněli i tohle), si zopakujte sami nahlédnutím do probrané matematiky v bakalářském studiu.

4.3 Opakování o lineární homogenní rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty

Uvažujme lineární homogenní rovnici n-tého řádu

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{4.3}$$

s konstantními koeficienty $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$.
Hledejme řešení rovnice (4.3) ve tvaru

$$y = e^{\lambda t},$$

kde λ je reálné nebo komplexní číslo. Potom λ vyhovuje **charakteristické rovnici**

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{4.4}$$

V následující větě si připomeneme, jakým způsobem se konstruuje obecné řešení rovnice (4.3) pro všechny možné případy kořenů charakteristické rovnice (4.4).

Věta 4.1
a) *Každému k-násobnému reálnému kořenu λ charakteristické rovnice* (4.4) *odpovídá k partikulárních (a lineárně nezávislých) řešení tvaru*

$$\mathrm{e}^{\lambda t},\ t\mathrm{e}^{\lambda t},\ t^2\mathrm{e}^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

b) *Každé dvojici s-násobných komplexně sdružených kořenů $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ charakteristické rovnice* (4.4) *odpovídá $2s$ partikulárních (a lineárně nezávislých) řešení tvaru tvaru*

$$\begin{array}{lllll} \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, & t\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, & t^2\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, & \ldots, & t^{s-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t; \\ \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, & t\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, & t^2\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, & \ldots, & t^{s-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t. \end{array}$$

c) *Součet násobností všech kořenů je roven stupni charakteristické rovnice n; proto je počet všech výše uvedených partikulárních řešení n.* **Obecné řešení** *diferenciální rovnice* (4.3) *je lineární kombinací těchto partikulárních řešení s* **libovolnými** *koeficienty.*

Příklad 4.5 *Řešme diferenciální rovnici*

$$y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0. \tag{4.5}$$

Řešení. Je snadné uhodnout, že charakteristická rovnice

$$\lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

má kořen $\lambda = -1$. Dále

$$\begin{gathered}(\lambda + 1)(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = 0 \Longrightarrow \\ \lambda_1 = -1,\ (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \Longrightarrow \\ \lambda_2 = \lambda_3 = i,\ \ \lambda_4 = \lambda_5 = -i.\end{gathered}$$

Obecné řešení diferenciální rovnice (4.5) je

$$y = c_1 \mathrm{e}^{-t} + (c_2 + c_3 t)\cos t + (c_4 + c_5 t)\sin t,$$

kde c_1, c_2, ..., c_5 jsou libovolné konstanty.

4.4 Určení partikulárního řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice metodou odhadu

Naším cílem bude určit partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x), \tag{4.6}$$

kde $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ jsou konstanty za předpokladu, že pravá strana $g(x)$ má speciální předepsaný tvar, který za chvíli uvedeme. Víme, že obecné řešení rovnice (4.6) je rovné součtu obecného řešení přidružené homogenní rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{4.7}$$

a některého partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Postup konstrukce obecného řešení přidružené homogenní rovnice s konstantními koeficienty byl vyložen výše. Informace o tomto obecném řešení homogenní rovnice nám budou užitečné pro nalezení partikulární řešení nehomogenní rovnice. Níže uvedená metoda se nazývá metodou **odhadu** nebo též metodou **neurčitých koeficientů**. Některé učebnice také píší o **zvláštní pravé straně**. Její použití je možné jen v případě, že pravá strana rovnice (4.6) má speciální tvar.

4.4.1 Věta o metodě odhadu

Použití metoda odhadu je založena na následující větě.

Věta 4.2 (Metoda odhadu) *Předpokládejme, že pravá strana rovnice* (4.6) *má tvar*

$$g(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \left[P_s^1(x)\cos\beta x + P_m^2(x)\sin\beta x \right], \tag{4.8}$$

kde $P_s^1(x)$ a $P_m^2(x)$ jsou polynomy stupňů s a m. Potom má partikulární řešení rovnice (4.6) *(s přesností do koeficientů polynomů) tvar*

$$y_p(x) = x^k \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \left[R_r^1(x)\cos\beta x + R_r^2(x)\sin\beta x \right],$$

kde $R_r^1(x)$ a $R_r^2(x)$ jsou polynomy stupňů nejvíce $r = \max\{s, m\}$. Číslo k je rovné nule, není-li výraz $\alpha + i \cdot \beta$ kořenem charakteristické rovnice asociované homogenní rovnice. V opačném případě udává číslo k násobnost tohoto kořene.

Koeficienty polynomů $R_r^1(x)$ a $R_r^2(x)$ lze určit přesně dosazením tvaru partikulárního řešení $y_p(x)$ do rovnice (4.6) a porovnáním koeficientů při stejných funkcionálních výrazech. Takový je praktický postup přesného „dourčení“. Jak již bylo uvedeno, v případě, že pravá strana $g(x)$ rovnice (4.6) nemá uvedený tvar, metoda odhadu není funkční. V takovém případě lze užít univerzální metodu - metodu varice konstant, kterou uvedeme v části.

4.4.2 Ilustrace metody odhadu

Ukážeme na příkladech, jak lze metodu odhadu použít.

Příklad 4.6 *Nalezněte řešení počáteční úlohy*

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 2 - x, \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 6. \end{cases} \tag{4.9}$$

Řešení. Pravá strana rovnice je polynomem prvního stupně. Je tedy funkcí, definovanou na celém intervalu $I = \mathbb{R}$. Proto zde bude definováno také řešení počáteční úlohy (4.9). Řešení úlohy najdeme ve třech krocích:

a) První krok spočívá v nalezení obecného řešení asociované homogenní rovnice

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

a její kořeny jsou

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Obecné řešení asociované homogenní rovnice je určeno tvarem

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

b) Ve druhém kroku najdeme partikulární řešení nehomogenní rovnice. Snadno lze ověřit, že pravá strana uvažované rovnice má tvar (4.8), uvedený ve Větě 4.2 pro

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ P_1^1(x) = -x + 2.$$

Číslo $\alpha + i\cdot\beta = 0$ není kořenem charakteristické rovnice. Proto budeme hledat partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = x^0 \mathrm{e}^{0\cdot x}\left[(ax+b)\cos(0\cdot x) + R_2(x)\sin(0\cdot x)\right] = ax + b$$

kde a a b jsou vhodné konstanty. Můžeme je najít dosazením předpokládaného partikulárního řešení $y_p(x)$ do výchozí nehomogenní diferenciální rovnice. Dostáváme

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = -2a + ax + b = 2 - x,$$

odkud $a = -1$ a $b = 0$. Po dosazení vidíme, že partikulární řešení je určené vztahem $y_p(t) = -x$.
c) Ve třetím a posledním kroku sestavíme obecné řešení výchozí nehomogenní rovnice a zvolíme hodnoty libovolných konstant tak, abychom obdrželi řešení, vyhovující daným počátečním podmínkám. Obecným řešením asociované nehomogenní rovnice je funkce

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x - x,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Určeme je tak, aby partikulární řešení vyhovovalo počátečním podmínkám. Dosazení počátečních podmínek do nalezeného řešení a do jeho derivace

$$y'(x) = C_2\mathrm{e}^x + (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x - 1$$

vede ke vztahům

$$\begin{aligned} 3 &= C_1, \\ 6 &= C_2 + C_1 - 1. \end{aligned}$$

Tento systém má řešení $C_1 = 3$, $C_2 = 4$. Hledané řešení počáteční úlohy je

$$y(t) = (3 + 4x)\mathrm{e}^x - x.$$

Příklad 4.7 *Najděte obecné řešení nehomogenní rovnice*

$$y'' + y = x\cos x + \sin x. \tag{4.10}$$

Řešení. I v tomto příkladu je pravá strana funkcí, definovanou na celém intervalu $I = \mathbb{R}$. Na tomto intervalu bude určeno také obecné řešení rovnice (4.10). Úlohu vyřešíme ve dvou krocích:
a) První krok opět spočívá v nalezení obecného řešení asociované homogenní rovnice

$$y'' + y = 0.$$

Charakteristická rovnice je tvaru

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

a má kořeny

$$\lambda_{1,2} = \pm i.$$

Obecné řešení asociované homogenní rovnice je

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.
b) Druhý krok spočívá v hledání partikulární řešení nehomogenní rovnice. Snadno lze ověřit, že pravá strana uvažované rovnice má tvar (4.8), uvedený ve Větě 4.2 pro

$$\alpha = 0,\ \beta = 1,\ P_1^1(x) = x,\ P_0^2(x) = 1.$$

Číslo $\alpha + i \cdot \beta = i$ je kořenem charakteristické rovnice. Proto budeme hledat partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = x\mathrm{e}^{0 \cdot x}\left[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x)\right] = (ax^2+bx)\cos x + (cx^2+dx)\sin x,$$

kde a, b, c a d jsou vhodné konstanty. Najdeme je dosazením předpokládaného partikulárního řešení $y_p(x)$ do výchozí nehomogenní diferenciální rovnice. Po předběžném pomocném výpočtu

$$\begin{aligned} y_p'(x) = (2ax+b)\cos x + (2cx+d)\sin x - (ax^2+bx)\sin x + (cx^2+dx)\cos x = \\ \big(cx^2+(d+2a)x+b\big)\cos x + \big(-ax^2+(-b+2c)x+d\big)\sin x \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} y_p''(x) = (2cx+d+2a)\cos x + (-2ax-b+2c)\sin x - \\ \big(cx^2+(d+2a)x+b\big)\sin x + \big(-ax^2+(-b+2c)x+d\big)\cos x = \\ \big(-ax^2-bx+4cx+2d+2a\big)\cos x + \big(-cx^2-4ax-dx+2c-2b\big)\sin x \end{aligned}$$

dostáváme

$$y_p''+y_p = (4cx+2d+2a)\cos x + (-4ax+2c-2b)\sin x = x\cos x + \sin x.$$

Porovnáním koeficientů při stejných funkcích vede k hodnotám koeficientů

$$a = 0,\ b = -\frac{1}{4},\ c = \frac{1}{4},\ d = 0.$$

Obecným řešením nehomogenní rovnice je funkce

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x^2\sin x,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

4.5 Opakování o nalezení partikulárního řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice metodou variace konstant

Budeme se zabývat nehomogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Ukážeme, jak lze najít její partikulární řešení za předpokladu, že známe obecné řešení asociované homogenní lineární diferenciální rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Předpokládejme, že systém funkcí

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$$

je fundamentálním systémem řešení asociované homogenní rovnice. Její obecné řešení má potom tvar

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

kde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ jsou libovolné konstanty. Pokusíme se najít partikulární řešení $y = y_p(x)$ nehomogenní rovnice ve tvaru, který připomíná obecné řešení asociované rovnice:

$$y_p(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \cdots + C_n(x) y_n(x), \tag{4.11}$$

kde

$$C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x) \tag{4.12}$$

jsou prozatím neznámé funkce. Další postup má svým cílem určit systém funkcí (4.12). Přitom budeme požadovat, aby některé další vlastnosti výrazu (4.11) byly analogické vlastnostem obecného řešení homogenní rovnice. Při vysvětlení podstaty se omezíme na případ rovnic druhého řádu.

4.6 Variace konstant v případě rovnic druhého řádu

Uvažujme rovnici

$$y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = g(x).$$

Předpokládejme, že systém funkcí $y_1(x), y_2(x)$ je fundamentálním systémem řešení asociované homogenní rovnice.

$$y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0.$$

Její obecné řešení má potom tvar

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty. Pokusíme se najít partikulární řešení $y = y_p(x)$ nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x), \tag{4.13}$$

kde

$$C_1(x) \quad \text{a} \quad C_2(x) \tag{4.14}$$

jsou prozatím neznámé funkce. Najděme první derivaci výrazu (4.13). Přitom budeme předpokládat, že výsledek bude mít formální tvar stejný, jako kdyby se jednalo o derivaci obecného řešení homogenní rovnice, tj., jako kdyby funkce $C_1(x)$ a $C_2(x)$ byly konstantami. Tento předpoklad vede k požadavku, aby byla označená část výsledku rovna nule:

$$y_p'(x) = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x) + \underbrace{C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x)}_{=0} =$$

$$C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Najdeme druhou derivaci. Na rozdíl od předchozího výpočtu budeme předpokládat, že označená část výsledku je rovna pravé straně nehomogenní rovnice, tj. funkci $g(x)$:

$$y_p''(x) = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \underbrace{C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x)}_{=g(x)} = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + g(x).$$

Napišme oba předpoklady, které jsme učinili. První derivace hledaných funkcí $C_1(x)$ a $C_2(x)$ musí vyhovovat systému rovnic:

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) &=& 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) &=& g(x). \end{array}\right. \tag{4.15}$$

Systém (4.15) je systémem algebraických rovnic vzhledem k neznámým derivacím $C_1'(x)$ a $C_2'(x)$. Determinant tohoto systému je wronskián

$$W(x) = W(y_1(x), y_2(x)),$$

který je na uvažovaném intervalu I nenulový. Proto má systém (4.15) jediné řešení. Z principiálního hlediska není podstatné znát přesný tvar tohoto řešení (které může být snadno zapsáno s pomocí determinantů). Spokojíme se jen s konstatováním, že toto řešení může být zapsané ve tvaru

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_1'(x) &=& \omega_1(x), \\ C_2'(x) &=& \omega_2(x), \end{array}\right. \tag{4.16}$$

kde funkce $\omega_1(x)$ a $\omega_2(x)$ jsou spojitými funkcemi na intervalu I. Integrací jednotlivých vztahů, uvedených v (4.16) dostáváme hledané funkce $C_1(x), C_2(x)$, vyhovující všem zapsaným požadavkům. Jejich dosazením do předpokládaného tvaru partikulárního řešení (4.11) dostáváme

$$y_p(x) = y_1(x)\int \omega_1(x)\mathrm{d}x + y_2(x)\int \omega_2(x)\mathrm{d}x.$$

O tom, že tento výraz je skutečně partikulárním řešením nehomogenní rovnice svědčí způsob jeho konstrukce. Můžeme se však zkouškou přímo přesvědčit o správnosti tohoto tvrzení. Poznamenejme ještě, že v případě, když budeme při integraci funkcí $\omega_1(x)$ a $\omega_2(x)$ zapisovat i příslušné libovolné integrační konstanty, dostaneme po dosazení do předpokládaného tvaru partikulárního řešení (4.13) obecné řešení dané nehomogenní rovnice.

4.7 Modifikace metody variace konstant v případě rovnic libovolného řádu

Výše uvedený postup zůstane stejný. Vypišme jen tvar systému, který je analogický uvedenému systému (4.15). Rovnice, kterým musí vyhovovat neznámé funkce (4.14), jsou

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) & + \cdots + & C_n'(x)y_n(x) & = & 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) & + \cdots + & C_n'(x)y_n'(x) & = & 0, \\ \cdots & & & & \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) & + \cdots + & C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) & = & 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) & + \cdots + & C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & = & g(x). \end{cases}$$

Dále postupujeme obdobně jako v případě rovnic druhého řádu.

4.7.1 Příklad

Ukažme použití metody variace konstant na příkladu.

Příklad 4.8 *Najděte obecné řešení rovnice*

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}. \tag{4.17}$$

Řešení. Řešení rovnice (4.17) bude definované na intervalu $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (zdůvodněte proč). Postup řešení rozdělíme do dvou kroků:
a) Nejprve najdeme obecné řešení přidružené homogenní rovnice

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Odpovídající charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 1$ a obecné řešení je

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.
b) Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme v souladu s metodou variace konstant ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x.$$

Zapišme příslušný systém (4.15):

$$\begin{aligned} C_1'(x)e^x &+ C_2'(x)xe^x &= 0, \\ C_1'(x)e^x &+ C_2'(x)(1+x)e^x &= \frac{e^x}{x^2}. \end{aligned}$$

Po úpravě (krácení výrazem e^t) dostaneme

$$\begin{array}{rcrcl} C_1'(x) & + & C_2'(x)x & = & 0, \\ C_1'(x) & + & C_2'(x)(1+x) & = & \dfrac{1}{x^2}, \end{array}$$

odkud

$$C_1'(x) = -\frac{1}{x}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{x^2}$$

a po integraci

$$C_1(x) = -\ln|x|, \quad C_2(x) = -\frac{1}{x}.$$

Partikulární řešení má tvar

$$y_p(x) = -(\ln|x|)\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x.$$

Obecné řešení rovnice (4.17) je

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x - (\ln|x|)\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x.$$

Toto obecné řešení můžeme upravit takto (na základě vašich znalostí provedenou úpravu zdůvodněte)

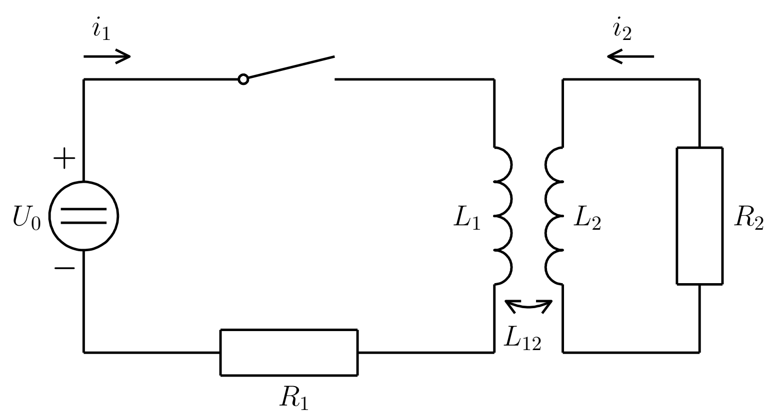
$$y = D_1\mathrm{e}^x + D_2x\mathrm{e}^x - (\ln|x|)\cdot\mathrm{e}^x,$$

kde D_1 a D_2 jsou libovolné konstanty.

4.8 Příklad rovnice vyššího řádu popisující elektrický obvod

Lineární diferenciální rovnice vyššího řádu mohou mimo jiné sloužit i pro popis dějů v elektrických obvodech. Na ukázku zde předvedeme jeden příklad.

Příklad 4.9 *Uvažujme elektrický obvod znázorněný na obrázku 4.1. Před sepnutím spínače byl obvod v ustáleném stavu, tj. $i_2(0) = 0$. Určete pro $t \geq 0$ průběhy proudů $i_1(t)$ a $i_2(t)$.*



Obrázek 4.1: Elektrický obvod z příkladu 4.9

Řešení. Aplikací napěťového Kirchhoffova zákona dostaneme rovnice

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = U_0, \tag{4.18}$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + L_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{4.19}$$

Ze druhé rovnice můžeme vyjádřit $i_1'(t)$ jako

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{L_{12}}\left(R_2 i_2 + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right). \tag{4.20}$$

Toto vyjádření nyní dosadíme do rovnice (4.18):

$$R_1 i_1 - \frac{L_1}{L_{12}}\left(R_2 i_2 + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right) + L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = U_0.$$

Jestliže takto vzniklou rovnici zderivujeme a opět dosadíme za $i_1'(t)$ podle (4.20), dostaneme rovnici druhého řádu

$$-\frac{R_1}{L_{12}}\left(R_2 i_2 + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{L_1}{L_{12}}\left(R_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2}\right) + L_{12}\frac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} = 0.$$

Vynásobením této rovnice faktorem $L_{12}/(R_1R_2)$ dostaneme

$$\left(\frac{L_{12}^2}{R_1R_2} - \frac{L_1L_2}{R_1R_2}\right)\frac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} - \left(\frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2}\right)\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - i_2 = 0. \tag{4.21}$$

Označme $\kappa = L_{12}/\sqrt{L_1L_2}$ (činitel vazby cívek), $\tau_1 = L_1/R_1$ a $\tau_2 = L_2/R_2$. Potom můžeme psát

$$\left(\kappa^2 - 1\right)\tau_1\tau_2\frac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} - (\tau_1+\tau_2)\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - i_2 = 0.$$

Charakteristická rovnice je

$$\left(\kappa^2 - 1\right)\tau_1\tau_2\lambda^2 - (\tau_1+\tau_2)\lambda - 1 = 0$$

a její kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\tau_1+\tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1+\tau_2)^2 + 4(\kappa^2-1)\tau_1\tau_2}}{2(\kappa^2-1)\tau_1\tau_2}.$$

Je zřejmé, že kořeny jsou reálné. Řešení rovnice (4.21) proto je

$$i_2(t) = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

V obvodu tedy nemůže vzniknout kmitavý děj; to je konečně patrné z jeho fyzikální struktury.

Zatím jsme našli obecné řešení rovnice (4.21). Potřebujeme však najít partikulární řešení. Počáteční podmínku pro proud i_2 máme – musí platit $i_2(0) = 0$. Počáteční podmínku pro první derivaci i_2 v $t = 0$ určíme z této úvahy: Protože $i_1(0) = i_2(0) = 0$, dosazením do rovnic (4.18), (4.19) dostaneme

$$\begin{aligned} L_1 \left.\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} + L_{12} \left.\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} &= U_0, \\ L_2 \left.\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} + L_{12} \left.\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic dostaneme

$$\left.\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{U_0 L_{12}}{L_{12}^2 - L_1 L_2} = \frac{U_0 \kappa^2}{(\kappa^2 - 1) L_{12}} \,.$$

Integrační konstanty c_1 a c_2 určíme ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 &= \frac{U_0 \kappa^2}{(\kappa^2 - 1) L_{12}} \,. \end{aligned}$$

Z první rovnice máme $c_1 = -c_2$. Dosazením do druhé rovnice pak vyjde

$$c_1 = -c_2 = \frac{U_0 \kappa^2}{(\kappa^2 - 1) L_{12} (\lambda_1 - \lambda_2)} \,,$$

takže

$$i_2(t) = \frac{U_0 \kappa^2}{(\kappa^2 - 1) L_{12} (\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\right) .$$

Zřejmě je $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, takže $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$ a $\mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \geq 0$. Protože $\kappa < 1$, je $\kappa^2 - 1 < 0$. Vychází tedy $i_2(t) \leq 0$. Z toho plyne, že proud $i_2(t)$ má opačný směr, než je na obrázku 4.1 znázorněno čítací šipkou.

Nyní se zabývejme vyšetřením průběhu proudu $i_1(t)$. V novém ustáleném stavu je

$$i_1(\infty) = \frac{U_0}{R_1} = i_{1p}.$$

Z výchozí soustavy rovnic napsané pro $t = 0$ dostaneme

$$\left.\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{U_0 L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} = \frac{-U_0}{(\kappa^2 - 1) L_1} \,.$$

Po výpočtu integračních konstant najdeme výsledek

$$i_1(t) = \frac{U_0}{R_1} \left(1 + \lambda_1 \frac{1 + \lambda_2 \tau_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \lambda_2 \frac{1 + \lambda_1 \tau_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\right) .$$

4.9 Vektorový tvar lineárního systému a existence řešení

Budeme se zabývat řešením soustavy n obyčejných diferenciálních rovnice prvního řádu tvaru

$$\begin{array}{lcccccccccc} x_1' & = & a_{11}(t)x_1 & + & a_{12}(t)x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}(t)x_n & + & f_1(t) \\ x_2' & = & a_{21}(t)x_1 & + & a_{22}(t)x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}(t)x_n & + & f_2(t) \\ & \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ x_n' & = & a_{n1}(t)x_1 & + & a_{n2}(t)x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}(t)x_n & + & f_n(t). \end{array} \tag{4.22}$$

Tuto soustavu můžeme přepsat jako

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

neboli zkráceně

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{4.23}$$

kde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.10 *Soustavu diferenciálních rovnic*

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 + 5x_2 + \mathrm{e}^t - 2t \\ x_2' &= 4x_1 - 3x_2 + 10t \end{aligned}$$

můžeme zapsat maticově jako

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t - 2t \\ 10t \end{pmatrix},$$

zatímco soustavu

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

můžeme rozepsat po složkách jako

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - 2x_2 + \cos t \\ x_2' &= \phantom{x_1 - {}} 5x_2 + \sin t. \end{aligned}$$

Definice 4.1 *Sloupcový vektor*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

*je **řešením** systému diferenciálních rovnic (4.22) na intervalu I, jestliže všechny jeho složky jsou na I diferencovatelné a rovnice (4.22) jsou splněny pro každé $t \in I$.*

Příklad 4.11 *Ověřte, že vektory*

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \quad a \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{6t} = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{6t} \\ 5\mathrm{e}^{6t} \end{pmatrix}$$

jsou řešeními soustavy

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$.
Řešení: *Výpočet provedeme pouze pro $\mathbf{x}_1$; s $\mathbf{x}_2$ si pak již čtenář určitě poradí sám. Dosadíme vektor $\mathbf{x}_1$ do zadané soustavy rovnic za $\mathbf{x}$ a přesvědčíme se, že se levá strana soustavy rovná pravé straně:*

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{x}_1' = \begin{pmatrix} (\mathrm{e}^{-2t})' \\ (-\mathrm{e}^{-2t})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{-2t} \\ 2\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \\ P &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + 3(-\mathrm{e}^{-2t}) \\ 5\mathrm{e}^{-2t} + 3(-\mathrm{e}^{-2t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{-2t} \\ 2\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} = L. \end{aligned}$$

Stejně jako u jediné diferenciální rovnice, i u systémů diferenciálních rovnic často řešíme tzv. **počáteční úlohu**, která spočívá v tom, že hledáme řešení zadaného systému, které vyhovuje určité počáteční podmínce:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{4.24}$$

kde $t_0 \in \mathbb{R}$ je nějaký bod (často, ale nikoli vždy, to bývá 0) a $\mathbf{x}_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)^{\mathrm{T}}$.

Příklad 4.12 *Vektor $\mathbf{x}_1$ z příkladu 4.11 je řešením soustavy z téhož příkladu, které vyhovuje počáteční podmínce $\mathbf{x}(0) = (1, -1)^{\mathrm{T}}$, protože $\mathbf{x}_1(0) = (\mathrm{e}^0, -\mathrm{e}^0)^{\mathrm{T}} = (1, -1)^{\mathrm{T}}$. Zato počáteční podmínce $\mathbf{x}(2) = (3, 4)^{\mathrm{T}}$ by nevyhovovalo ani jedno z řešení $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$. Tím ovšem nijak neříkáme, že řešení splňující tuto podmínku neexistuje. Jak je to s existencí řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic, o tom mluví následující věta.*

Věta 4.3 (O existenci a jednoznačnosti řešení)
Jsou-li všechny prvky matice $\mathbf{A}(t)$ a vektoru $\mathbf{f}(t)$ funkce spojité na intervalu I, který obsahuje bod t_0, pak existuje jediné řešení počátečního problému (4.24) na intervalu I.

4.10 Struktura řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic

V této kapitole se budeme zabývat tím, jak řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic obecně vypadá a jak se dá zapsat. Postupy pro nalezení řešení budou popsány až v dalších kapitolách. Aniž bychom to dál zdůrazňovali, všude v této kapitole budeme předpokládat, že prvky matice $\mathbf{A}$ a vektoru $\mathbf{f}$ v soustavě (4.23) jsou spojité funkce na nějakém intervalu I.

4.10.1 Homogenní soustavy

Nejprve se zaměříme na **homogenní soustavy**. To jsou takové soustavy, kde $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{o}$, tj. ze soustavy (4.23) zbude pouze

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \tag{4.25}$$

Příkladem homogenního systému je systém rovnic z příkladu 4.11. V tomto příkladu byly uvedeny dva vektory, $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$, které byly řešeními uvedené soustavy. Vyzýváme čtenáře, aby samostatně ověřil, že i $2\mathbf{x}_1$ je řešením oné soustavy, stejně jako $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. Když si to zkusíte, asi již snadno uvěříte následujícímu tvrzení.

Princip superpozice

Věta 4.4 (Princip superpozice)
Nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$, $k \in \mathbb{N}$, jsou řešení homogenního systému (4.25) na intervalu I. Pak je také libovolná lineární kombinace

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k, \quad c_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, k,$$

řešením tohoto systému na intervalu I.

Zůstaňme ještě chvíli u příkladu 4.11. Známe dvě konkrétní řešení zadané soustavy a nyní jsme ukázali, že pomocí nich dostaneme hromadu dalších řešení. Teď se možná ptáte, jestli takhle, tj. coby lineární kombinace $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$, dostaneme úplně všechna řešení. Zde je odpověď ANO. Proč to tak je, to asi na první pohled zřejmé není, takže tomu pro tenhle moment prostě uvěřte.
Kdybychom však měli k dispozici řešení $\mathbf{x}_1 = (\mathrm{e}^{-2t}, -\mathrm{e}^{-2t})^{\mathrm{T}}$ a $\mathbf{x}_3 = 2\mathbf{x}_1 = (2\mathrm{e}^{-2t}, -2\mathrm{e}^{-2t})^{\mathrm{T}}$ (že tohle je taky řešení, si snadno ověříte), všechna řešení bychom jako jejich lineární kombinace nedostali. To je vidět docela dobře, stačí se podívat na řešení $\mathbf{x}_2 = (3\mathrm{e}^{6t}, 5\mathrm{e}^{6t})^{\mathrm{T}}$. Ať se budeme snažit sebevíc, takové konstanty c_1 a c_2, pro které by platilo $\mathbf{x}_2 = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_3$, nenajdeme.
Nyní se zamyslete, v čem je ten zásadní rozdíl mezi dvojicemi řešení $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ a $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_3$. Následující definice snad napoví.

Lineární závislost a nezávislost řešení

Definice 4.2 (Lineární závislost a nezávislost řešení)
Nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ *jsou řešení homogenního systému* (4.25) *na intervalu* I*. Řekneme, že tato řešení jsou* ***lineárně závislá*** *na tomto intervalu, jestliže existují konstanty*

$$c_1, c_2, \ldots, c_k$$

ne všechny rovné nule, takové že

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_k\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{o}$$

pro každé $t \in I$*. Jestliže vektory nejsou na* I *lineárně závislé, říkáme, že jsou* ***lineárně nezávislé****.*

Lineární závislost obyčejných číselných vektorů už znáte, a proto vás asi nepřekvapí, že vektory jsou lineárně závislé, pokud lze jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních (pro dva vektory to znamená, že jeden je konstantním násobkem druhého).
K rozeznání toho, zda n-tice řešení soustavy n diferenciálních rovnic je či není lineárně závislá, slouží tzv. Wronskián. Pod tímto vznešeným vědeckým jménem se skrývá determinant matice poskládané z jednotlivých vektorů řešení.

Věta 4.5 (Kritérium pro lineární nezávislost řešení)
Nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *jsou řešení homogenního systému* (4.25) *na intervalu* I*,*

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tato řešení jsou lineárně nezávislá, právě když je Wronskián

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4.26}$$

pro každé $t \in I$*.*

Dá se ukázat, že jsou-li $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ vektory řešení soustavy (4.25), pak je buďto

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) \neq 0 \quad \text{pro každé } t \in I,$$

nebo

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = 0 \quad \text{pro každé } t \in I.$$

Pokud tedy ukážeme, že je Wronskián nenulový v jediném bodě $t_0 \in I$, plyne z toho již, že je nenulový na celém intervalu I. Tento fakt se vám možná nezdá nijak převratný, nicméně vězte, že slouží k důkazům mnoha tvrzení, která zde dále uvedeme. (Uvedeme ta tvrzení, nikoli jejich důkazy. Kdyby přece jenom někdo chtěl vědět, *proč* něco platí, a ne jenom, *že* to platí, nechť se s důvěrou obrátí na svého učitele. Určitě ho svým zájmem potěší.)

Příklad 4.13 *Ukažte, že vektory*

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\sin t + \cos t \end{pmatrix},$$

které jsou řešeními systému

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

jsou lineárně nezávislé.

Řešení: *To, že jsou vektory* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ *řešeními nějaké soustavy, uvádíme jenom pro pořádek. Z cvičných důvodů to můžete sami ověřit. Tady budeme řešit, co bylo zadáno, tj. zjišťovat, jestli jsou tyto vektory lineárně nezávislé. Vypočteme Wronskián:*

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= \begin{vmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t & \mathrm{e}^t & -\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\cos t - \sin t & 0 & -\sin t + \cos t \end{vmatrix} = \\ &= \cos t \cdot \mathrm{e}^t \cdot (-\sin t + \cos t) - \sin t \cdot \mathrm{e}^t \cdot (-\cos t - \sin t) = \mathrm{e}^t \neq 0. \end{aligned}$$

Wronskián je nenulový pro všechna reálná t*, a proto jsou vektory* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ *lineárně nezávislé.*

Fundamentální množina řešení

Definice 4.3 (Fundamentální množina řešení)
Jakákoli n*-tice* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *lineárně nezávislých řešení homogenního systému* (4.25) *na intervalu* I *se nazývá* ***fundamentální množina řešení*** *na tomto intervalu.*

Pomocí fundamentální množiny budeme moci zapsat jakékoli řešení systému. Jestli si teď děláte starosti, jestli se vždy podaří najít k soustavě n rovnic n lineárně nezávislých řešení, následující věta vás jistě uklidní.

Věta 4.6 *Fundamentální množina řešení homogenního systému* (4.25) *na intervalu* I *vždy existuje.*

Věta o struktuře obecné řešení homogenního systému

Definice 4.4 (Obecné řešení homogenního systému)
Nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *je fundamentální množina řešení homogenního systému* (4.25) *na nějakém intervalu* I*. Obecné řešení systému na tomto intervalu se definuje jako*

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n, \tag{4.27}$$

kde c_i*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, jsou libovolné konstanty.*

Dá se ukázat, že každé řešení systému (4.25) lze zapsat ve tvaru (4.27), tj. ke každému řešení $\mathbf{x}$ najdeme konstanty $c_1, \ldots, c_n$ tak, aby platilo (4.27).

Příklad 4.14 *Zapište obecné řešení soustavy z příkladu 4.13.*
Řešení: *Známe tři řešení zadané soustavy – $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ a $\mathbf{x}_3$. V příkladu 4.13 jsme ověřili, že jsou to řešení lineárně nezávislá. Proto tvoří fundamentální množinu řešení a obecné řešení soustavy je tedy*

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\sin t + \cos t \end{pmatrix}.$$

4.10.2 Nehomogenní soustavy

Nyní se zaměříme na **nehomogenní systémy** (tj. funkce $\mathbf{f}(t)$ v systému (4.23) už nebude nulová).

Partikulární řešení $\mathbf{x}_p$ nehomogenního systému je libovolný vektor neobsahující volitelné konstanty, který vyhovuje soustavě rovnic (4.23).

Příklad 4.15 *Ověřte, že vektor*

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} 3t - 4 \\ -5t + 6 \end{pmatrix}$$

je partikulární řešení nehomogenního systému

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 12t - 11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$
Řešení: *Dosadíme vektor $\mathbf{x}_p$ do zadané soustavy rovnic a přesvědčíme se, že se levá strana soustavy rovná pravé straně:*

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{x}_p' = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \\ P &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}_p + \begin{pmatrix} 12t - 11 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t - 4 \\ -5t + 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12t - 11 \\ -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (3t-4) + 3 \cdot (-5t+6) + 12t - 11 \\ 5 \cdot (3t-4) + 3 \cdot (-5t+6) - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = L. \end{aligned}$$

Všimněte si, prosím, že pokud z pravé strany soustavy diferenciálních rovnic, kterou jsme v tomto příkladu zkoumali, vypustíme vektor $\mathbf{f}(t) = (12t - 11, -3)^{\mathrm{T}}$, zůstane nám homogenní systém, kterým jsme se zabývali v příkladu 4.11. Víme již, že řešením tohoto homogenního systému je např. vektor $\mathbf{x}_1 = (\mathrm{e}^{-2t}, -\mathrm{e}^{-2t})^{\mathrm{T}}$. V následujícím příkladu se podíváme, co se stane, jestliže sečteme jedno partikulární řešení nehomogenního systému diferenciálních rovnic s jedním řešením příslušného homogenního systému.

Příklad 4.16 *Ověřte, že vektor*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$$

je také řešením systému z příkladu 4.15.
Řešení: *Jestli si teď říkáte, že je to pořád na jedno brdo a že tenhle příklad přeskočíte, počkejte s tím přeskakováním ještě chvíli. Příklad totiž vyřešíme jinak než ten předchozí, způsobem, který by vás měl dovést k tomu, abyste snáze uvěřili větě, která bude následovat. Víme již, že $\mathbf{x_p}$ je řešením nehomogenního systému, zatímco $\mathbf{x}_1$ je řešením homogenního systému se stejnou maticí*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tedy platí $\mathbf{x}_p' = \mathbf{A}\mathbf{x}_p + \mathbf{f}$, zatímco $\mathbf{x}_1' = \mathbf{A}\mathbf{x}_1$. Jak to dopadne pro součet, který jsme označili jako $\mathbf{x}$?

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_1)' = \mathbf{x}_p' + \mathbf{x}_1' = \mathbf{A}\mathbf{x}_p + \mathbf{f} + \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_1) + \mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}.$$

Dokázali jsme tedy, že $\mathbf{x}$ vyhovuje soustavě $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$.
Když si tento postup ještě jednou prohlédnete, uvidíte, že jsme vlastně nikde nepracovali s konkrétními čísly nebo funkcemi, ani se nikde neprojevilo, že se jedná o soustavu dvou rovnic a ne třeba tří. Všechno bylo provedeno obecně pro vektor $\mathbf{x}_p$, který je řešením nehomogenního systému $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$, a pro vektor $\mathbf{x}_1$, který je řešením homogenního systému $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Když si ještě vzpomeneme, jak vypadá obecné řešení homogenního systému, můžeme tímto považovat následující větu za dokázanou.

Věta 4.7 *Nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$, $k \in \mathbb{N}$, jsou řešení homogenního systému (4.25) na intervalu I a nechť $\mathbf{x}_p$ je libovolné řešení nehomogenního systému (4.23) na tomtéž intervalu. Pak*

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_k\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_p,$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_k$ jsou libovolné konstanty, je také řešením nehomogenního systému (4.23) na intervalu I.

Věta o struktuře obecného řešení nehomogenního systému

Definice 4.5 (Obecné řešení nehomogenního systému)
Nechť $\mathbf{x}_p$ je jedno dané řešení nehomogenního systému (4.23) na nějakém intervalu I a nechť

$$\mathbf{x}_c = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n$$

je obecné řešení odpovídajícího homogenního systému (4.25) na tomtéž intervalu. ***Obecné řešení*** *nehomogenního systému na intervalu I lze zapsat jako*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_p. \tag{4.28}$$

Obecné řešení $\mathbf{x}$ nehomogenního systému (4.23) je tedy rovno součtu obecného řešení $\mathbf{x}_c$ přidruženého homogenního systému (4.25) a některého partikulárního řešení $\mathbf{x}_p$ nehomogenního systému (4.23).

Jak se dalo očekávat, každé řešení systému (4.23) lze zapsat ve tvaru (4.28), tj. ke každému řešení $\mathbf{x}$ najdeme konstanty $c_1, \dots, c_n$ tak, aby platilo (4.28).

Příklad 4.17 *Zapište obecné řešení nehomogenního systému z příkladu 4.15.*
Řešení: *V příkladu 4.15 jsme ověřili, že partikulárním řešením zadaného systému je např. vektor* $\mathbf{x}_p = (3t-4, -5t+6)^{\mathrm{T}}$. *V příkladu 4.11 byla uvedena dvě řešení příslušného homogenního systému:* $\mathbf{x}_1 = (\mathrm{e}^{-2t}, -\mathrm{e}^{-2t})^{\mathrm{T}}$ *a* $\mathbf{x}_2 = (3\mathrm{e}^{6t}, 5\mathrm{e}^{6t})^{\mathrm{T}}$. *Sami ověřte, že jsou to řešení lineárně nezávislá. Obecné řešení homogenního systému je proto*

$$\mathbf{x}_c = c_1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{6t} \\ 5\mathrm{e}^{6t} \end{pmatrix}.$$

Na základě definice 4.5 je tedy obecné řešení zadaného nehomogenního systému

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_p = c_1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{6t} \\ 5\mathrm{e}^{6t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix},$$

a to na intervalu $(-\infty, \infty)$.

4.10.3 Fundamentální matice a její vlastnosti

Jak jste viděli, zápis obecného řešení soustavy diferenciálních rovnic je dost dlouhý a může být poněkud nepřehledný. K o něco kratšímu zápisu může sloužit tzv. **fundamentální matice**, o které nyní bude řeč.
Vrátíme se nyní k homogenním soustavám. Jak již jsme řekli, jestliže $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ je fundamentální množina řešení homogenního systému (4.25) na intervalu I, pak obecné řešení systému na tomto intervalu je $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n$. Toto řešení rozepíšeme a trochu si s jeho zápisem pohrajeme:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_1x_{11} + c_2x_{12} + \dots + c_nx_{1n} \\ c_1x_{21} + c_2x_{22} + \dots + c_nx_{2n} \\ \vdots \\ c_1x_{n1} + c_2x_{n2} + \dots + c_nx_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}c_1 + x_{12}c_2 + \dots + x_{1n}c_n \\ x_{21}c_1 + x_{22}c_2 + \dots + x_{2n}c_n \\ \vdots \\ x_{n1}c_1 + x_{n2}c_2 + \dots + x_{nn}c_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vidíme, že obecné řešení homogenního systému můžeme zapsat jako maticový součin

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

Definice 4.6 (Fundamentální matice)
Nechť

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

je fundamentální množina řešení homogenního systému (4.25) *na intervalu* I*. Matice*

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

*se nazývá **fundamentální matice** systému na tomto intervalu.*

Vztah (4.29) říká, že obecné řešení homogenního systému (4.25) můžeme zapsat pomocí fundamentální matice systému jako $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}$, kde $\mathbf{c}$ je $n \times 1$ sloupcový vektor libovolných konstant.

Příklad 4.18 *Zapište obecné řešení homogenní soustavy z příkladu 4.11 pomocí fundamentální matice.*
Řešení: *Víme, že vektory*

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \quad a \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{6t} = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{6t} \\ 5\mathrm{e}^{6t} \end{pmatrix}$$

tvoří fundamentální množinu řešení zadané soustavy na intervalu $(-\infty, \infty)$.
Fundamentální matice je proto

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & 3\mathrm{e}^{6t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} & 5\mathrm{e}^{6t} \end{pmatrix}$$

a obecné řešení je

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & 3\mathrm{e}^{6t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} & 5\mathrm{e}^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

U fundamentální matice ještě chvíli zůstaneme. Budeme zkoumat různé její vlastnosti, které přijdou vhod později.
Protože $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}$ je řešením soustavy $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, musí platit

$$\mathbf{\Phi}'(t)\mathbf{c} = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c} \quad \text{neboli} \quad (\mathbf{\Phi}'(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t))\,\mathbf{c} = \mathbf{o}.$$

Jelikož tento vztah platí pro každé $t \in I$ a pro jakýkoli sloupcový vektor konstant $\mathbf{c}$, musí být

$$\mathbf{\Phi}'(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{o},$$

a tedy

$$\mathbf{\Phi}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t). \tag{4.30}$$

Další důležitou vlastností fundamentální matice je to, že její determinant je vždy různý od nuly. To je vidět z toho, že determinant fundamentální matice je vlastně Wronskián $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. Protože řešení $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně nezávislá, je $\det \mathbf{\Phi}(t) = W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \neq 0$ pro každé $t \in I$. Odtud hned plyne platnost následující věty.

Věta 4.8 (Fundamentální matice má inverzi)
Nechť $\mathbf{\Phi}(t)$ je fundamentální matice homogenního systému (4.25) na intervalu I. Pak $\mathbf{\Phi}(t)^{-1}$ existuje pro každé $t \in I$.

Zkuste se nyní trošku zamyslet nad tím, jestli k dané soustavě diferenciálních rovnic existuje pouze jediná fundamentální matice, nebo jestli jich může být víc. Už jste něco vymysleli? Správná odpověď je, že fundamentální matice jednoznačně dána není. Např. v příkladu 4.18 by stačilo v matici $\mathbf{\Phi}$ prohodit sloupce a už bychom měli jinou fundamentální matici. Fundamentálních matic k danému systému existuje dokonce nekonečně mnoho. Nás teď bude zajímat jedna – označíme ji speciálně $\mathbf{\Psi}(t)$, která mezi všemi ostatními vyniká tou vlastností, že v určitém vybraném bodě $t_0 \in I$ platí

$$\mathbf{\Psi}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}, \tag{4.31}$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice typu $n \times n$.
Fundamentální množinu řešení, ze kterých je matice $\mathbf{\Psi}$ poskládaná, tvoří vektory $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \dots, n$, takové že

$$\mathbf{v}_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{v}_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.32}$$

Najít matici $\mathbf{\Psi}$ s vlastností (4.31) není úplně jednoduché. Jedna možnost je využít libovolnou fundamentální matici $\mathbf{\Phi}(t)$, kterou už jsme nějak získali. Matici $\mathbf{\Psi}$ pak můžeme vypočítat jako

$$\mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(t_0)^{-1}.$$

Později ukážeme, jakým jiným způsobem se dá matice $\mathbf{\Psi}$ najít a k čemu vlastně může být dobrá.

4.11 Exponenciála matice a její užití

4.11.1 Definice exponenciály matice

V této části definujeme pojem takzvané exponenciály matice. Definice, kterou nyní uvedeme je motivována známým rozkladem exponenciální funkce do Mac'laurinovy řady

$$\mathrm{e}^t = 1 + \frac{1}{1!} \cdot t + \frac{1}{2!} \cdot t^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot t^n + \cdots ,$$

která konverguje pro všechny hodnoty $t \in \mathbb{R}$.
Uveďme ještě jednu motivaci. Předpokládejme, že máme najít řešení skalární úlohy

$$y' = ay, \quad y(0) = y_0. \tag{4.33}$$

Použijme metodu postupných aproximací. Potom

$$\begin{aligned}
y_1(t) =& y_0 + \int_0^t a \cdot y_0 \mathrm{d}s = y_0 + aty_0 = (1 + at)y_0,\\
y_2(t) =& y_0 + \int_0^t a \cdot y_1(s) \mathrm{d}s = y_0 + \int_0^t (a \cdot y_0 + a^2 s \cdot y_0) \mathrm{d}s =\\
& \left(1 + \frac{1}{1!}at + \frac{1}{2!}a^2t^2\right) y_0,\\
\ldots&\\
y_k(t) =& \left(1 + \frac{1}{1!}at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}a^kt^k\right) y_0,\\
\ldots&\quad .
\end{aligned}$$

V limitě pak dostáváme

$$y(t) = \left(1 + \frac{1}{1!}at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}a^kt^k + \cdots\right) y_0 = \mathrm{e}^{at} \cdot y_0.$$

Budeme-li místo skalární úlohy (4.33) uvažovat systém

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0 \tag{4.34}$$

s konstantní $n \times n$ maticí A a s číselným vektorem y_0, pak analogický postup dává

$$\begin{aligned}
y_1(t) =& y_0 + \int_0^t A \cdot y_0 \mathrm{d}s = y_0 + tAy_0 = (1 + tA)y_0, \\
y_2(t) =& y_0 + \int_0^t A \cdot y_1(s)\mathrm{d}s = y_0 + \int_0^t (A \cdot y_0 + tAa^2 \cdot y_0) = \\
& \left(1 + \frac{t}{1!}A + \frac{1}{2!}t^2A^2\right) y_0, \\
\ldots \\
y_k(t) =& \left(1 + \frac{t}{1!}A + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}t^kA^k\right) y_0, \\
\ldots & \quad .
\end{aligned}$$

Výsledkem je nekonečná řada

$$y(t) = \left(1 + \frac{1}{1!}tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}t^kA^k + \cdots\right) y_0,$$

která je součinem tzv. exponenciály matice A (v závorkách) a vektoru y_0.

Definice 4.7 *Pro $n \times n$ matici $B(t)$ definujme* exponenciálu matice *jako novou $n \times n$ matici pomocí řady*

$$\mathrm{e}^{B(t)} := \exp[B(t)] = E + \frac{1}{1!}B(t) + \frac{1}{2!}B^2(t) + \cdots + \frac{1}{n!}B^n(t) + \cdots . \tag{4.35}$$

Každý prvek matice $\exp[B(t)]$ je součtem některé řady a výše uvedená definice v sobě zahrnuje celkem $n \times n$ řad. Lze ukázat, že každá tato řada konverguje, a tím prokázat korektnost této definice. Použitím Definice 4.7 se snadno dokáže následující

Věta 4.9 *Je-li O nulová $n \times n$ matice, pak*

$$\mathrm{e}^O = E.$$

Další vlastnost říká, že pro exponenciálu matice platí podobná výpočetní pravidla jako pro exponenciální funkci

Věta 4.10 *Jestliže $n \times n$ matice A a B komutují, tj. platí-li $AB = BA$, potom*

$$\mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^B \cdot \mathrm{e}^A.$$

Důkaz této věty jenom naznačíme s důrazem na ten moment, kdy je zapotřebí komutativita matic. Pro jednoduchost budeme dokazovat rovnost dvou posledních výrazů (podobně by se dokázala rovnost prvních dvou). Podle definice rozvineme druhý výraz

$$\begin{aligned}
e^{A+B} =& I + \frac{A+B}{1!} + \frac{(A+B)^2}{2!} + \cdots \\
=& I + \frac{A}{1!} + \frac{B}{1!} + \frac{1}{2}(A+B)(A+B) + \cdots \\
=& I + \frac{A}{1!} + \frac{B}{1!} + \frac{1}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) + \cdots \\
=& I + \frac{A}{1!} + \frac{B}{1!} + \frac{1}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \cdots .
\end{aligned}$$

Nyní vypočteme podle definice třetí výraz:

$$\begin{aligned}
e^B \cdot e^A =& \left[I + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \cdots \right] \\
& \times \left[I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots \right] \\
=& I^2 + \frac{A}{1!} + \frac{B}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{BA}{2!} + \frac{B^2}{2!} + \cdots \\
=& I^2 + \frac{A}{1!} + \frac{B}{1!} + \frac{1}{2}(A^2 + BA + B^2) + \cdots .
\end{aligned}$$

Vidíme, že oba dva výrazy jsou si rovny s přesností do kvadratických členů. Podobně bychom v prokazování rovnosti kubických členů a členů vyšších mocnin pokračovali dále.
□

Výsledek Věty 4.10 implikuje při volbě $B = -A$, že exponenciála matice e^A je invertibilní a že platí

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}.$$

Příklad 4.19 *Najděte (pomocí definice) exponenciály matice* e^{At} *v případě, že*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Přímým výpočtem obdržíme

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \dots .$$

Proto

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{At} &= E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t}{1!}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Uveďme ještě jednu větu, která v některých případech umožňuje najít exponenciálu matice bez použití definice.

Věta 4.11 *Je-li A matice typu $n \times n$ a P je regulární matice taková, že*

$$P^{-1}AP = \Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

potom platí

$$\mathrm{e}^A = P \exp(\Lambda) P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Zvolíme-li v této větě matici P jako 2×2 jednotkovou matici, obdržíme ihned výsledek příkladu č. 4.19.

Příklad 4.20 *Najděte (pomocí definice) exponenciálu matice e^{At} v případě, že*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Přímým výpočtem obdržíme

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad A^5 = A.$$

Proto

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \frac{t^4}{4!}A^4 + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t}{1!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^4}{4!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{t^{2k}}{(2k)!} & -\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

4.12 Užití exponenciály matice

Je-li A konstantní $n \times n$ matice pak s pomocí vzorce (4.35) dostaneme

$$\left(e^{At}\right)' = Ae^{At}. \tag{4.36}$$

Tento vztah dává možnost zapsat obecné řešení homogenního systému diferenciálních lineárních rovníc (4.36) s konstantní maticí A, tj. systému

$$\frac{dy}{dt} = Ay. \tag{4.37}$$

Věta 4.12 *Fundamentální matice systému (4.37) s konstantní maticí A je dána vztahem*

$$Y(t) = e^{At}.$$

Důkaz. S pomocí vztahu (4.36) dostaneme

$$Y'(t) = Ae^{At} = AY(t),$$

tj. matice $Y(t)$ je skutečně řešení systému (4.37). Kromě toho

$$Y(0) = E,$$

tj. sloupce této matice jsou generované pomocí lineárně nezávislých řešení systému (4.36).
$\square$

Přímou prověrkou můžeme dokázat platnost následující věty (proveďte samostatně):

Věta 4.13 *Obecné řešení $y = y(t)$ lineárního systému (4.37) je dané vzorcem*

$$y = y(t) = e^{At} \cdot C \tag{4.38}$$

kde C je konstantní vektor.

Přímý výpočet exponenciály matice podle definice (tj. podle vzorce (4.35)) je obyčejně nepoužitelný kvůli tomu, že není možné najít součet definiční řady. Jak vyplývá z Věty 4.13 je pro nalezení některého řešení (nebo pro nalezení obecného řešení systému (4.37) užitečné mít metody pro výpočet exponenciály matice. Takové metody existují. Nyní uvedeme jednu z nich.

4.13 Metoda pro nalezení exponenciály matice

Metoda nalezení exponenciály matice, kterou nyní uvedeme, vyžaduje nalezení jistého partikulárního řešení lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty. Proto si zopakujte látku, která byla v bakalářském studiu této problematice věnována. Určitě si vzpomenete, že důležitou roli hrál pojem tzv. *charakteristického polynomu* a *charakteristické rovnice*. Tyto pojmy se vyskytují i při řešení systémů lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Předpokládejme, že je dána konstantní $n \times n$ matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Charakteristickým polynomem matice A nazýváme polynom $p(\lambda)$ definovaný pomocí determinantu

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Je zřejmé, že po provedení výpočtu determinantu lze polynom $p(\lambda)$ zapsat ve schématickém tvaru skutečného polynomu například takto

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

kde koeficienty $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ dostaneme, když determinant spočítáme. V následující větě předpokládáme, že charakteristický polynom byl získán právě tímto způsobem. Poukažme ještě na to, že v řadě učebnic se charakteristický polynom definuje jako determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix},$$

který má po provedení výpočtu hodnotu $-p(\lambda)$ (víte proč?). Tento znaménkový rozdíl se stírá, hovoříme-li o tzv. *charakteristické rovnici* matice A, která má tvar

$$p(\lambda) = 0.$$

Věta 4.14 *Předpokládejme, že A je konstantní $n \times n$ matice, jejíž charakteristický polynom má tvar*

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Předpokládejme dále, že $y(t)$ je řešení počáteční úlohy pro lineární homogenní diferenciální rovnici n-tého řádu se stejnými koeficienty:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0, \tag{4.39}$$

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-2)} = 0,\ y^{(n-1)}(0) = 1. \tag{4.40}$$

Označme

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

Pak pro exponenciálu matice platí vztah:

$$\mathrm{e}^{At} = z_1(t)I + z_2(t)A + \cdots + z_n(t)A^{n-1}.$$

4.14 Řešení Cauchyovy úlohy pro lineární systémy užitím fundamentálních matic

4.14.1 Cauchyova úloha pro homogenní systém

Uvažujme počáteční (Cauchyovu) úlohu pro homogenní systém

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A(t)y, \quad y(t_0) = y_0, \tag{4.42}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$. Tato úloha má jediné řešení. Zapišme toto řešení pomocí fundamentální matice, která je normovaná v bodě $t = t_0$. Taková matice je řešením úlohy $Y' = AY(t)$, $Y(t_0) = E$, tj.,

$$Y(t) := \Phi(t; t_0), \quad \Phi(t_0; t_0) = E.$$

Nyní lze snadno ověřit, že řešení úlohy (4.42) je dáno vztahem

$$y(t) = \Phi(t; t_0)y_0. \tag{4.43}$$

4.14.2 Cauchyova úloha pro homogenní systém s konstantní maticí

V případě že uvažujme počáteční (Cauchyovu) úlohu pro homogenní systém s konstantní maticí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Ay, \quad y(t_0) = y_0, \tag{4.44}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$, lze s pomocí vztahu (4.38) ve Větě 4.13 vyjádřit normovanou fundamentální matici v bodě $t = t_0$ jako maticový exponenciál

$$\Phi(t; t_0) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A} \tag{4.45}$$

a řešení (4.43) zapsat vztahem (4.38), tj.,

$$y(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}y_0.$$

4.14.3 Cauchyova úloha pro nehomogenní systém

Zapišme nyní řešení počáteční (Cauchyovy) úlohy pro nehomogenní systém

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = y_0, \tag{4.46}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$. Také tato úloha má jediné řešení. Obecné řešení odpovídající homogenní úlohy můžeme zapsat ve tvaru

$$y(t) = \Phi(t; t_0) \cdot C,$$

kde $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$ je libovolný číselný vektor. V souladu s metodou variace konstant se pokusíme najít řešení $y(t)$ (partikulární) úlohy (4.46) na intervalu $\mathcal{I}$ ve tvaru

$$y(t) = \Phi(t; t_0) \cdot C(t) \tag{4.47}$$

tak, aby platilo $y(t_0) = y_0$. Vztah, kterému vyhovuje vektorová funkce $C(t)$ je

$$C'(t) = \Phi^{-1}(t; t_0)b(t).$$

Jeho integrací (v mezích t_0 a t, $t_0, t \in \mathcal{I}$) dostáváme

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s; t_0)b(s)\mathrm{d}s.$$

Abychom dostali řešení (partikulární) požadovaných vlastností, volíme $C(t_0) = y_0$. Potom

$$y(t) = \Phi(t; t_0)y_0 + \Phi(t; t_0) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s; t_0)b(s)\mathrm{d}s. \tag{4.48}$$

Tvar (4.48) upravme na

$$y(t) = \Phi(t; t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t; t_0)\Phi^{-1}(s; t_0)b(s)\mathrm{d}s$$

a konečnou podobu mu dejme užitím vztahu:

$$\Phi(t; t_0)\Phi^{-1}(s; t_0) = \Phi(t; s), \quad t, t_0, s \in \mathcal{I}, \tag{4.49}$$

tj.,

$$y(t) = \Phi(t; t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t; s)b(s)\mathrm{d}s. \tag{4.50}$$

4.14.4 Cauchyova úloha pro nehomogenní systém s konstantní maticí

V případě že uvažujme počáteční (Cauchyovu) úlohu pro nehomogenní systém s konstantní maticí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Ay + b(t), \quad y(t_0) = y_0, \tag{4.51}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$, můžeme užitím vztahu (4.45) nalezené řešení (4.50) zjednodušit. Protože

$$\Phi(t; t_0) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A} \quad \text{a} \quad \Phi(t; s) = \mathrm{e}^{(t-s)A},$$

má řešení (4.50) tvar

$$y(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A} b(s) \mathrm{d}s. \tag{4.52}$$

4.15 Transformace lineární rovnice n-tého řádu na systém

Na závěr této kapitoly ukážeme, jak lze libovolnou lineární diferenciální rovnici n-tého řádu převést na lineární systém. Tato možnost převedení je velice významná, neboť umožňuje použít veškerou vyloženou teorii taktéž k rovnicím n-tého řádu.
Uvažujme lineární obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu

$$u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = b^*(t), \tag{4.53}$$

kde koeficienty $a_{n-1}(t), \ldots, a_1(t), a_0(t)$ a nehomogenní člen $b^*(t)$ jsou spojité funkce na intervalu $\mathcal{I}$. Budeme rovnici (4.53) transformovat na systém rovnic. Nechť jsou $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nové závislé funkce, definované jako

$$y_1 = u,\ y_2 = u',\ y_3 = u'', \ldots, y_n = u^{(n-1)}.$$

Tímto předpisom byl definován vektor $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$. Pak je lineární obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu (4.53) ekvivalentní systému

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A(t)y + b(t), \tag{4.54}$$

kde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix},$$

a

$$b(t) = (0, 0, \ldots, 0, b^*(t))^T.$$

Podobně se ukáže, že počáteční problém

$$\begin{aligned} &u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = b^*(t), \\ &u(t_0) = u_1,\ u'(t_0) = u_2, \ldots, u^{(n-1)}(t_0) = u_n \end{aligned} \tag{4.55}$$

je ekvivalentní počáteční úloze

$$y' = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = y_0, \tag{4.56}$$

kde

$$y_0 = (u_1, u_2, \dots, u_n))^T.$$

4.16 Shrnutí kapitoly

Tato kapitola byla věnována lineárním systémům obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Po nezbytném připomenutí pomocných poznatků byla vyložena struktura obecného řešení lineárních homogenních i nehomogenních systémů. Další část kapitoly byla věnována jedné z metod řešení homogenních lineárních systémů s konstantními koeficienty. Její podstatou bylo využití exponenciály matice. V závěru kapitoly byly využity vlastnosti fundamentálních matic k vytvoření řešení počátečních úloh pro různé typy lineárních systémů.

4.17 Řešené příklady

Příklad 4.21 *Najděme obecné řešení systému*

$$\begin{array}{rcrcr} y_1' & = & 2y_1 & + & y_2, \\ y_2' & = & -3y_1 & + & 6y_2 \end{array}$$

s pomocí exponenciály matice.

Řešení. Nejprve najdeme charakteristický polynom matice A:

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 3)\cdot(\lambda - 5).$$

Pomocná počáteční úloha typu (4.39), (4.40) je druhého řádu:

$$y'' - 8y' + 15y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Tato úloha má obecné řešení $y(t) = d_1\mathrm{e}^{3t} + d_2\mathrm{e}^{5t}$. Dále platí $y'(t) = 3d_1\mathrm{e}^{3t} + 5d_2\mathrm{e}^{5t}$,

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \implies d_1 = -1/2,\ d_2 = 1/2$$

a

$$y(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{5t}.$$

Definujme v souladu se vztahem (4.41)

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{5t} \\ -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{3t} + \frac{5}{2}\mathrm{e}^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\mathrm{e}^{3t} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{5t} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{5t} \end{pmatrix}.$$

Exponenciála matice má tvar

$$\mathrm{e}^{At} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\mathrm{e}^{3t} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{5t} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}\mathrm{e}^{3t} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{5t} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{5t}\right) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\mathrm{e}^{3t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{5t} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{5t} \\ \frac{3}{2}\mathrm{e}^{3t} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{5t} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{5t} \end{pmatrix}.$$

Výsledné obecné řešení je dáno vztahem

$$y = \mathrm{e}^{At} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty.

Příklad 4.22 *Najděme obecné řešení systému*

$$\begin{aligned} y_1' &= 12y_1 - 6y_2, \\ y_2' &= 2y_1 + 4y_2 \end{aligned} \tag{4.57}$$

s pomocí exponenciály matice.

Řešení. Podobně jako ve výše uvedeném Příkladu 4.21 dostáváme

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 12-\lambda & -6 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16\lambda + 60 = (\lambda - 6)\cdot(\lambda - 10).$$

Pomocná počáteční úloha má tvar

$$y'' - 16y' + 10y = 0,\; y(0) = 0,\; y'(0) = 1$$

a její obecné řešení je: $y(t) = d_1\mathrm{e}^{6t} + d_2\mathrm{e}^{10t}$. Dále máme: $y'(t) = 6d_1\mathrm{e}^{6t} + 10d_2\mathrm{e}^{10t}$. S pomocí počátečních podmínek pak snadno obdržíme hodnoty konstant:

$$y(0) = 0,\; y'(0) = 1 \implies d_1 = -1/4,\; d_2 = 1/4$$

a

$$y(t) = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{6t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{10t}.$$

Definujme vektor $z(t)$:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{6t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{10t} \\ -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{6t} + \frac{5}{2}\mathrm{e}^{10t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\mathrm{e}^{6t} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{10t} \\ -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{6t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{10t} \end{pmatrix}.$$

Nakonec

$$\mathrm{e}^{At} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\mathrm{e}^{6t} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{10t} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}\mathrm{e}^{6t} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{10t} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{6t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{10t}\right) \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{6t} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{10t} & \frac{3}{2}\mathrm{e}^{6t} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{10t} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{6t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{10t} & \frac{3}{2}\mathrm{e}^{6t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{10t} \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení úlohy (4.57) je

$$y = \mathrm{e}^{At}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty.

Příklad 4.23 *Pomocí exponenciály matice najděme obecné řešení systému*

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2, \\ y_2' &= -y_1 + 4y_2. \end{aligned}$$

Řešení. Podobně jako ve výše uvedených příkladech dostáváme

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2.$$

Pomocný počáteční problém má tvar

$$y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

a jeho obecné řešení je $y(t) = (d_1 + d_2 t)e^{3t}$. Derivace řešení je $y'(t) = 3(d_1 + d_2 t)\mathrm{e}^{3t} + d_2\mathrm{e}^{3t}$. Využijeme počáteční podmínky. Dostáváme:

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \implies d_1 = 0,\ 3d_1 + d_2 = 1 \implies d_2 = 1.$$

Definujeme

$$y(t) = t\mathrm{e}^{t}.$$

Pak

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t\mathrm{e}^{3t} \\ (1+3t)\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-3t)\mathrm{e}^{3t} \\ t\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3t \\ t \end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{3t}.$$

Odpovedající maticová exponenciála má tvar

$$\mathrm{e}^{At} = (1-3t)\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (1-3t)\mathrm{e}^{3t} + 2t\mathrm{e}^{3t} & t\mathrm{e}^{3t} \\ -t\mathrm{e}^{3t} & (1-3t)\mathrm{e}^{3t} + 4t\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{3t}.$$

Obecné řešení výchozí úlohy je dáno vztahem:

$$y = \mathrm{e}^{At}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(1-t) + c_2 t \\ -c_1 t + c_2(1+t) \end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{3t},$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty. Zapišme tento výsledek v jiném tvaru. Předefinujme konstanty (nahradíme dané libovolné konstanty jinými libovolnými konstantami). Nechť $c_1 = -K_2$ a $c_2 = K_1 + K_2$, kde K_1 a K_2 jsou libovolná čísla. Pak lze výsledek zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1(t) &= K_1 e^{3t} + K_2 t e^{3t}, \\ y_2(t) &= K_1 e^{3t} + K_2(1+t)\cdot e^{3t}. \end{aligned}$$

4.18 Cvičení

Příklad 1 *Najděte obecné řešení systému*

$$\begin{array}{rcrcr} y_1' &=& 17y_1 &+& 9y_2, \\ y_2' &=& -25y_1 &-& 13y_2 \end{array}$$

s pomocí exponenciály matice.

Řešení. Obecné řešení systému má tvar

$$\begin{array}{rcl} y_1(t) &=& -3K_1e^{2t} - (3x+2)K_2te^{2t}, \\ y_2(t) &=& 5K_1e^{2t} + (5x+3)K_2 \cdot e^{2t}\,. \end{array}$$

Příklad 2 *Najděte obecné řešení systému*

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1' &=& & & y_2 &+& y_3, \\ y_2' &=& y_1 & & &+& y_3, \\ y_3' &=& y_1 &+& y_2. & & \end{array}$$

s pomocí exponenciály matice.

Řešení. Obecné řešení systému má tvar

$$\begin{array}{rcl} y_1(t) &=& K_1e^{-t} + K_2e^{-t} + K_3e^{2t}, \\ y_2(t) &=& -K_1e^{-t} + K_3e^{2t}, \\ y_3(t) &=& -K_2e^{-t} + K_3e^{2t}\,. \end{array}$$

Příklad 3 *Najděte obecné řešení systému*

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1' &=& -3y_1 &+& 4y_2 &-& 2y_3, \\ y_2' &=& y_1 & & &+& y_3, \\ y_3' &=& 6y_1 &-& 6y_2 &+& 5y_3. \end{array}$$

s pomocí exponenciály matice.

Řešení. Obecné řešení systému má tvar

$$\begin{array}{rcl} y_1(t) &=& K_1e^{t} + K_2e^{-t}, \\ y_2(t) &=& K_1e^{t} + K_3e^{2t}, \\ y_3(t) &=& -K_2e^{-t} + 2K_3e^{2t}\,. \end{array}$$

5 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty - řešení na bázi zobecněných vlastních vektorů

5.1 Cíl kapitoly

V předchozí kapitole jsme se naučili využívat exponenciálu matice. Její nalezení však není jednoduchá záležitost. Proto uvedeme postup, pomocí kterého lze řešit soustavu lineárních diferenciálních rovnice s konstantními koeficienty pomocí konstrukce tzv. vlastních vektorů. Předností této metody je, že dává řešení tak, jak o něm bylo hovořeno ve větách o struktuře řešení. Jinými slovy, metoda umožní nalézt n lineárně nezávislých řešení soustavy. Lineární kombinace těchto řešení dá obecné řešení soustavy. Při použití metody budeme pracovat s charakteristickým rovnicí a s jejími kořeny. Cílem je sestavit obecné řešení v závislosti na tom, jaké tyto kořeny jsou (reálné, komplexní, násobné).

5.2 Formulace problému a postup jeho řešení

V této části se budeme zabývat soustavou lineárních diferenciálních rovnice s konstantními koeficienty. Zapíšeme ji ve tvaru

$$x' = Ax, \tag{5.1}$$

kde A je reálná čtvercová matice s konstantními prvky, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ a tento vektor je vektorem hledaného řešení, zavisejícího na (nezávislé) proměnné t, tj. $x = x(t)$. Předpokládejme, že řešení soustavy (5.1) má tvar

$$x = v\exp(\lambda t), \tag{5.2}$$

kde λ je vhodné reálné nebo komplexní číslo a v je vhodný (reálný či komplexní) konstantní vektor. Poznamenejme, že máme na mysli hledání řešení netriviálních. Implicitně tedy předpokládáme, že $x(t) \not\equiv 0$ na $\mathbb{R}$. To vede ke zřejmému konstatování, že nás budou zajímat jen takové vektory v, které nejsou identické s nulovým vektorem o. Po dosazení tvaru (5.2) do soustavy (5.1) dostáváme

$$\lambda v\exp(\lambda t) = Av\exp(\lambda t)$$

nebo

$$(Av)\exp(\lambda t) - (\lambda v)\exp(\lambda t) = (A - \lambda E)v\exp(\lambda t) = o, \tag{5.3}$$

ve kterém je E čtvercová jednotková matice rozměru $n \times n$ a o je již zmíněný nulový vektor. Ve vektorovém vztahu (5.3) lze krátit výrazem $\exp(\lambda t)$. Dostáváme vztah

$$(A - \lambda E)v = o, \tag{5.4}$$

Zdůrazněme, že ve vztahu (5.4) již **není přítomna nezávislá proměnná** t. Tu se povedlo krácením eliminovat. Vztah (5.4) je vztahem mezi konstantní maticí A, neznámým (konstantním) vektorem v a hledaným číslem λ. Soustava (5.4) je lineární algebraickou soustavou rovnic vzhledem ke složkám vektoru v. Z teorie lineárních soustav vyplývá, že soustava (5.4) bude mít nenulové řešení v pouze tehdy, když bude její matice singulární. Musí tedy být

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{5.5}$$

Rovnice (5.5) je polynomiální rovnicí (stupně n) vzhledem k λ. Jinými slovy je to rovnice, které hledané číslo λ vyhovuje. Současně vidíme, že číslo λ nemusí být jediné. Obecně může mít rovnice (5.5) celkem n reálných a navzájem různých kořenů. Polynom

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda E) \tag{5.6}$$

nacházející se v levé straně rovnice (5.5) nazýváme **charakteristickým polynomem** a samotnou rovnici (5.5), tj. rovnici

$$p(\lambda) = 0 \tag{5.7}$$

nazýváme **charakteristickou rovnicí**. Kořeny **charakteristické rovnice** nazýváme **vlastní čísla** matice A. Je-li $\lambda = \lambda^*$ vlastním číslem matice A a vektor $v = v^*$ je řešením soustavy (5.4), tj. soustavy

$$(A - \lambda^* E)v = o,$$

nazýváme vektor v^* **vlastním vektorem** matice A (který přísluší vlastnímu číslu λ^*). Ještě jednou podtrhněme fakt, že z uvedeného vyplývá, že pro každou dvojici vlastního čísla a odpovídajícího vlastního vektoru λ^*, v^* je vektorová funkce

$$x = v^* \exp(\lambda^* t)$$

jedním z řešení soustavy (5.1).

5.3 Případ reálných a navzájem různých kořenů charakteristické rovnice

V případě, že má charakteristická rovnice (5.5) n navzájem různých vlastních čísel (která jsou samozřejmě reálná)

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \tag{5.8}$$

a vektory

$$v_1, v_2, \ldots, v_n \tag{5.9}$$

jsou jim odpovídající vlastní vektory, je konstrukce obecného řešení soustavy rovnic (5.1) jednoduchá. Snadno lze prověřit, že tato soustava vlastních vektorů je lineárně nezávislá. Pak z obecné teorie lineárních soustav okamžitě vyplývá tento výsledek:

Věta 5.1 (případ nenásobných vlastních čísel) *Má-li matice A celkem n navzájem různých vlastních čísel (5.8), kterým odpovídají vlastní vektory (5.9), potom n vektorových funkcí*

$$v_1 \exp(\lambda_1 t), v_2 \exp(\lambda_2 t), \ldots, v_n \exp(\lambda_n t) \tag{5.10}$$

tvoří **fundamentální systém řešení** *soustavy rovnic (5.1). Obecné řešení této soustavy lze vyjádřit ve tvaru:*

$$x(t) = C_1 v_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 v_2 \exp(\lambda_2 t) + \cdots + C_n v_n \exp(\lambda_n t), \tag{5.11}$$

kde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ jsou libovolné konstanty.

Příklad 5.1 *Metodou popsanou výše určete obecné řešení soustavy rovnic:*

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 - 2x_2, \\ x_2' &= -3x_1 - x_2. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Řešení. Soustava (5.12) je speciálním případem soustavy (5.1) pro $n = 2$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 4) = 0.$$

Její kořeny (a tedy hledaná vlastní čísla) jsou $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -4$. Máme tedy dvě reálná a různá vlastní čísla. Proto lze při hledání obecného řešení soustavy (5.12) využít Větu 5.1. Najděme nyní vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. Prvním vlastním vektorem

$$v_1 = (v_{11}, v_{12})^T,$$

odpovídajícím vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E) v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

Vzhledem k lineární závislosti řádků matice se soustava redukuje na jediný vztah

$$-3v_{11} - 2v_{12} = 0$$

a jedno nenulové řešení je například $v_1 = (2,-3)^T$. Řešení soustavy (5.12) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t)) = (2,-3)^T \cdot \mathrm{e}^t.$$

Podobným způsobem postupujeme v případě druhého vlastního čísla $\lambda_2 = -4$. Vlastní vektor $v_21 = (v_{21}, v_{22})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 4$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_2 E)v_2 = o.$$

Po rozepsání dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot v_2 = o.$$

Tato soustava se redukuje na jediný vztah

$$2v_{21} - 2v_{22} = 0$$

a jedno její nenulové řešení je například $v_2 = (1,1)^T$. Řešení soustavy (5.12), které odpovídá tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_2(t) = (x_{21}(t), x_{22}(t)) = (1,1)^T \cdot \mathrm{e}^{-4t}.$$

Fundamentální systém řešení soustavy (5.12) je tvořen dvojicí lineárně nezávislých řešení

$$(2,-3)^T \cdot \mathrm{e}^t \quad \text{a} \quad (1,1)^T \cdot \mathrm{e}^{-4t}$$

a její obecné řešení $x(t)$ je dáno lineární kombinaci

$$x(t) = C_1(2,-3)^T \cdot \mathrm{e}^t + C_2(1,1)^T \cdot \mathrm{e}^{-4t} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-4t}$$

s libovolnými konstantami C_1 a C_2. Na závěr ještě rozepišme poslední vztah po složkách. Protože $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, máme

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{-4t}, \\ x_2(t) &= -\,3\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{-4t}. \end{aligned}$$

5.4 Případ komplexních nenásobných vlastních čísel

Předpokládejme, že charakteristická rovnice (5.5) má komplexní kořen

$$\lambda = \alpha + \beta \cdot i,$$

kde i je komplexní jednotka. Protože koeficienty charakteristického polynomu (5.6) jsou reálná čísla (tento závěr vyplývá z předpokladu reálnosti matice A) je kořenem charakteristické rovnice i číslo komplexně sdružené s kořenem λ, tedy číslo

$$\overline{\lambda} = \alpha - \beta \cdot i.$$

Předpokládejme dále, že v je vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu λ. Pak je vektor

$$x(t) = v \exp(\lambda t)$$

řešením soustavy (5.1). Ukažme nyní, že řešením soustavy (5.1) je také vektor komplexně sdružený k vektoru $x(t)$, tj. vektor

$$\overline{x}(t) = \overline{v \exp(\lambda t)} = \overline{v} \exp(\overline{\lambda} t).$$

Číslo λ a odpovídající vlastní vektor v vyhovují soustavě (5.4), tj. vztahu

$$(A - \lambda E)v = o.$$

Protože se jedná o vztah mezi komplexními čísly musí se sobě rovnat (v případě zapsání komplexních čísel v algebraickém tvaru) reálné a imaginární složky čísel na levých a pravých stranách. V případě uvedeného vztahu jsou pravé strany nulové, proto jsou jak reálné, tak i komplexní složky čísel na levých stranách nulové. Proto je tedy jasné, že tento vztah bude platit také v případě, že budeme porovnávat čísla komplexně sdružená, tj. bude platit

$$\overline{(A - \lambda E)v} = \overline{o}.$$

Úpravami, které jsou běžné při počítání s komplexními čísly tento vztah redukujeme na vztah

$$(\overline{A} - \overline{\lambda E})\overline{v} = o$$

a nakonec na vztah

$$(A - \overline{\lambda} E)\overline{v} = o. \tag{5.13}$$

Tento vztah lze interpretovat takto: vyhovují-li číslo λ a odpovídající vlastní vektor v soustavě (5.4) pak této soustavě vyhovují i veličiny komplexně sdružené - číslo $\overline{\lambda}$ a vektor $\overline{v}$. To tedy znamená, že výše formulované tvrzení platí - je-li vektor

$$x(t) = v \exp(\lambda t)$$

řešením soustavy (5.1), pak je také vektor

$$\overline{x}(t) = \overline{v} \exp(\overline{\lambda} t)$$

řešením této soustavy. Obě dvě řešení $x(t)$ a $\overline{x}(t)$ jsou komplexními funkcemi. Vzhledem k linearitě uvažované soustavy (5.1) a k podmínce, že matice A je reálná opět dospíváme k závěru, že po dosazení libovolného z těchto řešení $x(t)$ nebo $\overline{x}(t)$ vyjádřených v algebraickém tvaru do soustavy (5.1) musí být jak reálná tak imaginární složka libovolné levé strany nulová. To současně znamená, že řešením soustavy (5.1) je jak odděleně vzatá reálná složka řešení, tak i odděleně vzatá imaginární složka řešení. Každá z těchto složek je již **reálnou** funkcí. Tímto postupem jsme ze **dvou komplexních řešení** $x(t)$ a $\overline{x}(t)$

získali **dvě reálná řešení** $\mathrm{Re}\, x(t)$ a $\mathrm{Im}\, x(t)$. Definujme tedy tato dvě reálná řešení formulemi

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathrm{Re}\, x(t) &= \frac{1}{2}\left(x(t) + \overline{x}(t)\right), \\ y_2(t) &= \mathrm{Im}\, x(t) &= \frac{1}{2i}\left(x(t) - \overline{x}(t)\right). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Snadno lze ukázat, že jak dvě komplexní řešení $x(t)$ a $\overline{x}(t)$ tak i dvě reálná řešení $\mathrm{Re}\, x(t)$ a $\mathrm{Im}\, x(t)$ jsou **lineárně nezávislá**. Získaný výsledek sformulujeme jako větu.

Věta 5.2 (komplexní nenásobná vlastní čísla) *Je-li komplexní číslo $\lambda = \alpha + \beta \cdot i$ vlastním číslem matice A a je-li v odpovídající vlastní vektor, pak má soustava (5.4) dvě lineárně nezávislá a reálná řešení $y_1(t)$ a $y_2(t)$ daná vztahy*

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathrm{Re}\,\left[v \exp(\lambda t)\right], \\ y_2(t) &= \mathrm{Im}\,\left[v \exp(\lambda t)\right]. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Příklad 5.2 *Určete obecné řešení soustavy rovnic:*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 3x_2, \\ x_2' &= -3x_1 + x_2. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Řešení. Soustava (5.16) je speciálním případem soustavy (5.1) pro $n = 2$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = (\lambda - 1 - 3i)(\lambda - 1 + 3i) = 0.$$

Její kořeny (a tedy hledaná vlastní čísla) jsou komplexní: $\lambda_1 = 1 + 3i$ a $\lambda_2 = 1 - 3i$. Máme tedy dvojici komplexně sdružených vlastních čísel. Proto lze při hledání obecného řešení soustavy (5.16) využít Větu 5.2.
Určeme nyní vlastní vektory, odpovídající prvnímu vlastnímu číslů. Vlastní vektor $v_1 = (v_{11}, v_{12})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1 + 3i$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -3i & 3 \\ -3 & -3i \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

Vzhledem k lineární závislosti řádků matice (první řádek je i-násobkem druhého) se soustava redukuje na jediný vztah
$$-3iv_{11} + 3v_{12} = 0$$
a jedno nenulové řešení je například $v_1 = (1, i)^T$. Řešení soustavy (5.16) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t)) = (1, i)^T \cdot \mathrm{e}^{(1+3i)t} =$$
$$(1, i)^T \cdot \mathrm{e}^t(\cos 3t + i \sin 3t) = \mathrm{e}^t \cdot \begin{pmatrix} \cos 3t + i \sin 3t \\ -\sin 3t + i \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Pomocí vztahů (5.14) nebo (5.15) nyní určíme dvojici lineárně nezávislých reálných řešení, tj. reálný fundamentální systém $y_1(t)$, $y_1(t)$ soustavy (5.16):

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \operatorname{Re} x_1(t) = \frac{1}{2}(x_1(t) + \overline{x}_1(t)) = \mathrm{e}^t \cdot \begin{pmatrix} \cos 3t \\ -\sin 3t \end{pmatrix}, \\ y_2(t) &= \operatorname{Im} x_1(t) = \frac{1}{2i}(x_1(t) - \overline{x}_1(t)) = \mathrm{e}^t \cdot \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obecné řešení $x(t)$ soustavy (5.16) je dáno lineární kombinaci

$$x(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = C_1\,\mathrm{e}^t \cdot \begin{pmatrix} \cos 3t \\ -\sin 3t \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^t \cdot \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}$$

s libovolnými konstantami C_1 a C_2. Na závěr ještě rozepišme poslední vztah po složkách. Protože $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, máme

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (\ \ C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) \cdot \mathrm{e}^t, \\ x_2(t) &= (-C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t) \cdot \mathrm{e}^t. \end{aligned}$$

Příklad 5.3 *Určete obecné řešení soustavy rovnic:*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 3x_2, \\ x_2' &= -5x_1 + x_2 - x_3, \\ x_3' &= -6x_1 - 6x_2 - 2x_3. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Řešení. Soustava (5.17) je speciálním případem soustavy (5.1) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & -1 \\ -6 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ -5 & 1-\lambda & -1 \\ -6 & -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \text{ (po úpravě) } = -(\lambda+2)[(\lambda-1)^2+9] = 0.$$

Její kořeny (a tedy hledaná vlastní čísla) jsou $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1+3i$ a $\lambda_3 = 1-3i$. Máme tedy tři nenásobná a různá vlastní čísla. Jedno reálné a dvě komplexně sdružená. Proto při hledání obecného řešení soustavy (5.30) využijeme v případě kořene $\lambda_1 = -2$ Větu 5.1 a v případě komplexně sdružených kořenů $\lambda_2 = 1+3i$ a $\lambda_3 = 1-3i$ využijeme Větu 5.2. Hledejme vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. První vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = -2$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

Třetí řádek lze vynechat a soustavu redukovat na tvar

$$\begin{array}{rcrcrcl} v_{11} & + & v_{12} & + & 0 & = & 0, \\ -5v_{11} & + & 3v_{12} & - & v_{13} & = & 0 \end{array}.$$

Jedno nenulové řešení je například $v_1 = (-1, 1, 8)^T$. Řešení soustavy (5.17) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), x_{13}(t)) = (-1, 1, 8)^T \cdot \mathrm{e}^{-2t}.$$

Druhý vlastní vektor $v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1+3i$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_2 E)v_2 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -3i & 3 & 0 \\ -5 & -3i & -1 \\ -6 & -6 & -3-3i \end{pmatrix} \cdot v_2 = o.$$

Přičteme-li ke druhému řádku první řádek vynásobený číslem $(5/3)i$ a ke třetímu řádku první vynásobený číslem $2i$ dostáváme

$$\begin{pmatrix} -3i & 3 & 0 \\ 0 & 2i & -1 \\ 0 & -6+6i & -3-3i \end{pmatrix} \cdot v_2 = o.$$

Dále přičtěme druhý řádek násobený číslem $-3(1+i)$ ke třetímu řádku. Máme

$$\begin{pmatrix} -3i & 3 & 0 \\ 0 & 2i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_2 = o.$$

Nyní snadno určíme jedno nenulové řešení. Je jím například vektor $v_2 = (-i, 1, 2i)^T$. Řešení soustavy (5.17) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_2(t) = (x_{21}(t), x_{22}(t), x_{32}(t)) = (-i, 1, 2i)^T \cdot \mathrm{e}^{(1+3i)t} = \\ (-i, 1, 2i)^T \cdot \mathrm{e}^t(\cos 3t + i \sin 3t) = \mathrm{e}^t \cdot \begin{pmatrix} \sin 3t - i\cos 3t \\ \cos 3t + i \sin 3t \\ -2\sin 3t + 2i\cos 3t \end{pmatrix}.$$

Pomocí vztahů (5.14) nebo (5.15) nyní určíme dvojici lineárně nezávislých reálných řešení $y_2(t)$, $y_3(t)$ soustavy (5.17), odpovídajících komplexnímu řešení $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \operatorname{Re} x_2(t) = \frac{1}{2}\left(x_2(t) + \overline{x}_2(t)\right) = \mathrm{e}^t \cdot \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \\ -2\sin 3t \end{pmatrix}, \\ y_3(t) &= \operatorname{Im} x_2(t) = \frac{1}{2i}\left(x_2(t) - \overline{x}_2(t)\right) = \mathrm{e}^t \cdot \begin{pmatrix} -\cos 3t \\ \sin 3t \\ 2\cos 3t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fundamentální systém řešení soustavy (5.17) je tvořen trojicí lineárně nezávislých řešení

$$\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \mathrm{e}^t \cdot \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \\ -2\sin 3t \end{pmatrix}, \ \mathrm{e}^t \cdot \begin{pmatrix} -\cos 3t \\ \sin 3t \\ 2\cos 3t \end{pmatrix}.$$

Její obecné řešení $x(t)$ je dáno lineární kombinací

$$x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^t \cdot \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \\ -2\sin 3t \end{pmatrix} + C_3\,\mathrm{e}^t \cdot \begin{pmatrix} -\cos 3t \\ \sin 3t \\ 2\cos 3t \end{pmatrix}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3.

5.5 Případ násobných vlastních čísel

V částech 5.3 a 5.4 byly rozebrány případy nenásobných vlastních čísel jak reálných, tak i komplexních. Bylo ukázáno, že v každém z těchto případů má řešení tvar, který byl předpokládán, tj. tvar (5.2). V případech, kdy jsou kořeny charakteristické rovnice (5.7) násobné je konstrukce fundamentálního systému komplikovanější. Ukazuje se, že každému násobnému vlastnímu číslu λ odpovídá přesně tolik lineárně nezávislých řešení, jaká je jeho násobnost. Mezi těmito řešeními se vždy vyskytuje alespoň jedno řešení, jehož tvar

jsme předpokládali, tj. řešení ve tvaru (5.2). Lineárně nezávislých řešení tvaru (5.2) může být i několik. Mohou však přibýt další řešení, která již tento tvar nemají. V této části popíšeme konstrukci těchto řešení. Můžeme přibližně říci, že každé následující lineárně nezávislé řešení (které již nemá tvar (5.2)) odpovídající násobnému vlastnímu číslu λ je násobkem každé souřadnice řešení tvaru (5.2) vhodným polynomem (vzhledem k nezávislé proměnné) stupně nejvýše prvého. Další řešení (pokud existuje) je odvozeno z prvého řešení (5.2) opět násobením každé jeho souřadnice vhodným polynomem stupně nejvýše druhého atd.
V případě, že násobné vlastní číslo λ je komplexní, bude (vzhledem k tomu, že matice A je reálná) komplexně sdružené číslo $\overline{\lambda}$ také vlastním číslem stejné násobnosti. Podobně jako v části 5.4 lze ukázat, že v případě existence komplexního řešení $x = x(t)$ soustavy (5.1) můžeme pomocí vzorců (5.15) obdržet dvě reálná řešení $y_1(t)$ a $y_2(t)$ soustavy (5.1).
Uveďme nyní postup, vedoucí k nalezení fundamentálního systému řešení soustavy (5.1).

5.6 Zobecněné vlastní vektory

Vektor v nazýváme **zobecněným vlastním vektorem hodnosti** r, odpovídající vlastnímu číslu λ, jestliže platí

$$(A - \lambda E)^r v = o \tag{5.18}$$

a

$$(A - \lambda E)^{r-1} v \neq o. \tag{5.19}$$

Je-li dán zobecněný vlastní vektor v hodnosti r, odpovídající vlastnímu číslu λ, pak k němu definujeme odpovídající **řetězec zobecněných vlastních vektorů**

$$v_1, v_2, \dots, v_r \tag{5.20}$$

délky r takto:

$$\left\{\begin{array}{lllll} v_r & = & v, & & \\ v_{r-1} & = & (A-\lambda E)v_r & = & (A-\lambda E)v, \\ v_{r-2} & = & (A-\lambda E)v_{r-1} & = & (A-\lambda E)^2 v, \\ \dots & & & & \\ v_1 & = & (A-\lambda E)v_2 & = & (A-\lambda E)^{r-1} v. \end{array}\right. \tag{5.21}$$

Poznamenejme, že z uvedené podmínky (5.18) okamžitě vyplývá, že vektor v_1 v řetězci (5.20) je **vlastním** vektorem odpovídajícím vlastnímu číslu λ, neboť dle (5.19) a (5.21) je $v_1 \neq o$ a dle (5.18) je $(A - \lambda E)v_1 = o$. Jednomu vlastnímu číslu může odpovídat několik různých řetězců, které mohou mít různé délky. Bez důkazu uveďme následující poznatky o zobecněných vlastních vektorech (příslušné důkazy k těmto a k dalším poznatkům jsou obsaženy v některých učebnicích algebry).

Věta 5.3 *Všechny vektory řetězce (5.20) jsou lineárně nezávislé. Odpovídá-li jednomu vlastnímu číslu několik zobecněných vlastních vektorů, které nejsou lineárně závislé, pak je množina vektorů tvořená všemi příslušnými řetězci lineárně nezávislou množinou. Součet délek všech lineárně nezávislých řetězců odpovídajících danému vlastnímu číslu je roven jeho násobnosti. Zobecněné vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.*

5.7 Metoda vlastních vektorů

5.7.1 Konstrukce fundamentálního systému

Poznatky uvedené ve Větě 5.3 jsou teoretickým základem garantujícím správnost a úplnost níže uvedeného postupu konstrukce fundamentálního systému řešení soustavy (5.1). Předpokládejme, že λ je vlastní číslo matice A, vektor v je zobecněným vlastním vektorem hodnosti s a (5.20) je odpovídající řetězec vlastních vektorů. Jak bylo uvedeno výše, platí

$$(A - \lambda E)v_1 = o. \tag{5.22}$$

Jinými slovy, v_1 je vlastní vektor matice A, příslušející vlastnímu číslu λ. Proto je vektor

$$y_1 := v_1\,\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{5.23}$$

řešením soustavy (5.1). Definujme vektor

$$y_2 := (v_1 t + v_2)\,\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{5.24}$$

a ukažme, že je řešením soustavy (5.1). Skutečně, pomocí vztahů (5.21) (ze kterých mj. vyplývá $(A - \lambda E)v_2 = v_1$, tj. $Av_2 = \lambda v_2 + v_1$) a (5.22) (tj. $\lambda v_1 = Av_1$) dostáváme

$$\begin{aligned} y_2' = \left[(v_1 t + v_2)\,\mathrm{e}^{\lambda t}\right]' = v_1\,\mathrm{e}^{\lambda t} + \lambda(v_1 t + v_2)\,\mathrm{e}^{\lambda t} = \left[(\lambda v_1 t) + \lambda v_2 + v_1\right]\,\mathrm{e}^{\lambda t} = \\ t\left(\lambda v_1\,\mathrm{e}^{\lambda t}\right) + (\lambda v_2 + v_1)\,\mathrm{e}^{\lambda t} = t\left(Av_1\,\mathrm{e}^{\lambda t}\right) + Av_2\,\mathrm{e}^{\lambda t} = \\ A\left(v_1 t + v_2\right)\,\mathrm{e}^{\lambda t} = Ay_2. \end{aligned}$$

Tím je tvrzení, že vektor y_2 je řešením soustavy (5.1) prověřeno. Definujme další vektor

$$y_3 := \left(v_1 \cdot \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3\right)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$$

a také ukažme, že je řešením soustavy (5.1). Dostáváme (kromě výše uvedených vztahů použijeme ještě $Av_3 = \lambda v_3 + v_2$)

$$\begin{aligned} y_3' = \left[\left(v_1 \cdot \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3\right) \mathrm{e}^{\lambda t}\right]' &= (v_1 t + v_2)\, \mathrm{e}^{\lambda t} + \\ \lambda \left(v_1 \cdot \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3\right) \mathrm{e}^{\lambda t} &= \left(\lambda v_1 \cdot \frac{t^2}{2} + (\lambda v_2 + v_1)\, t + (\lambda v_3 + v_2)\right) \mathrm{e}^{\lambda t} = \\ \frac{t^2}{2} \left(\lambda v_1 \, \mathrm{e}^{\lambda t}\right) + t(\lambda v_2 + v_1)\, \mathrm{e}^{\lambda t} &+ (\lambda v_3 + v_2)\, \mathrm{e}^{\lambda t} = \\ \frac{t^2}{2} \left(A v_1 \, \mathrm{e}^{\lambda t}\right) + t A v_2 \, \mathrm{e}^{\lambda t} &+ A v_3 \, \mathrm{e}^{\lambda t} = \\ A \left(v_1 \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3\right) \mathrm{e}^{\lambda t} &= A y_3. \end{aligned}$$

Podobným způsobem konstruujeme další vektory až po vektor

$$y_r := \left(v_1 \cdot \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + v_2 \cdot \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} + \cdots + v_{r-1} t + v_r\right) \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Protože jsou vektory řetězce (5.20) dle Věty 5.3 lineárně nezávislé a

$$y_1(0) = v_1, y_2(0) = v_2, \ldots, y_r(0) = v_r,$$

jsou vektory

$$y_1(t), y_2(t), \ldots, y_r(t) \tag{5.25}$$

také lineárně nezávislé. Získali jsme tedy r lineárně nezávislých řešení (5.25) soustavy (5.1).

Věta 5.4 *Množina všech vektorů (konstruovaných výše uvedeným způsobem) odpovídajících všem vlastním číslům a všem jim odpovídajícím řetězcům zobecněných vlastních vektorů tvoří* **fundamentální systém** *soustavy* (5.1).

Stranou jsme prozatím nechali otázku kolik zobecněných vlastních vektorů odpovídá násobnému vlastnímu číslu λ. Odpověď na ni vyplývá z teorie algebraických lineárních systémů a je obsažena v následující větě. Označme hodnost matice

$$A - \lambda E \tag{5.26}$$

písmenem h a její nulitu písmenem ν, kde $\nu = n - h$.

Věta 5.5 *Počet zobecněných vlastních vektorů odpovídajících násobnému vlastnímu číslu* λ *je roven nulitě* ν *matice* (5.26).

Ilustrujme popsaný postup několika příklady.

5.7.2 Ilustrace - konstrukce fundamentálního systému

Příklad 5.4 *Určete obecné řešení soustavy rovnic:*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 - x_3, \\ x_2' &= -x_1 + x_2 - x_3, \\ x_3' &= \quad\;\; - x_2 + 2x_3. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Řešení. Soustava (5.27) je speciálním případem soustavy (5.1) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \text{ (po úpravě) } = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0.$$

Vlastní čísla jsou: nenásobné číslo $\lambda_1 = 2$ a dvojnásobné číslo $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Hledejme vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. První vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

Druhý řádek matice soustavy je lineární kombinací prvního a třetího řádku. Proto lze soustavu redukovat na

$$\begin{aligned} v_{11} \quad\quad + v_{13} &= 0, \\ v_{12} \quad\quad &= 0 \end{aligned}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_1 = (-1, 0, 1)^T$. Řešení soustavy (5.27) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), x_{13}(t)) = (-1, 0, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t}.$$

Druhý vlastní vektor $v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_2 E)v_2 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_2 = o. \tag{5.28}$$

Snadno lze ověřit, že matice soustavy (5.28) má hodnost $h = 2$ a nulitu $\nu = 3 - 2 = 1$. Vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ tedy bude odpovídat jeden zobecněný vlastní vektor hodnosti $r = 2$. Třetí řádek matice soustavy je opačným prvním řádkem a soustavu lze redukovat na

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & v_{22} & - & v_{23} & = & 0, \\ v_{21} & & & + & v_{23} & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_2 = (-1, 1, 1)^T$. Jedno z řešení soustavy (5.27) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_2(t) = (x_{21}(t), x_{22}(t), x_{23}(t)) = (-1, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t.$$

Vytvořme řetězec zobecněných vlastních vektorů, odpovídajících uvažovanému vlastnímu číslu. Hledejme nenulový vektor

$$v_3 = (v_{31}, v_{32}, v_{33})^T,$$

splňující vztah

$$(A - \lambda_3 E)v_3 = v_2.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

První a třetí řádek jsou lineárně závislé. Soustavu lze tedy redukovat na tvat

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & v_{32} & - & v_{33} & = & -1, \\ -v_{31} & & & - & v_{33} & = & 1 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_3 = (-2, 0, 1)^T$. Další řešení soustavy (5.27) odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ je

$$x_3(t) = (x_{31}(t), x_{32}(t), x_{33}(t)) = (v_2 t + v_3) \cdot \mathrm{e}^t = \left((-1, 1, 1)^T t + (-2, 0, 1)^T\right) \cdot \mathrm{e}^t.$$

Všechna tři řešení soustavy (5.27) tvoří fundamentální systém řešení. Obecné řešení je dáno lineární kombinaci

$$x(t) = C_1(-1,0,1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_2(-1,1,1)^T \cdot \mathrm{e}^{t} + C_3\left((-1,1,1)^T t + (-2,0,1)^T\right) \cdot \mathrm{e}^{t} = C_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{t} + C_3\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right) \cdot \mathrm{e}^{t}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3.

5.8 Shrnutí kapitoly

Tato kapitola byla věnována řešení lineárních systémů obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty. Pomocí kořenů charakteristické rovnice byly sestaveny vlastní vektory a byl zkonstruován fundamentální systém řešení. Metoda konstrukce se lišila v závislosti na tom, zdali kořeny byly reálné či komplexní a násobné či nenásobné. V případě násobných kořenů se některá řešení lišila od původně předpokládaného tvaru. Vždy však jedno z řešení tento tvar mělo.

5.9 Řešené příklady

Příklad 5.5 *Určete obecné řešení soustavy rovnic:*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 + x_3,\\ x_2' &= -x_1 - x_2 + x_3,\\ x_3' &= x_1 + x_2 + x_3. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Řešení. Soustava (5.29) je speciálním případem soustavy (5.1) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1\\ -1 & -1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \text{ (po úpravě) } = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2) = 0.$$

Její kořeny (a tedy hledaná vlastní čísla) jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = -2$. Máme tři reálná a různá vlastní čísla. Proto můžeme při hledání obecného řešení soustavy (5.29) opět využít Větu 5.1.

Hledejme vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. První vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

První řádek matice soustavy je součtem druhého a třetího řádku. Proto lze soustavu redukovat na

$$\begin{array}{rcrcrcl} -v_{11} & - & 2v_{12} & + & v_{13} & = & 0, \\ v_{11} & + & v_{12} & & & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_1 = (-1, 1, 1)^T$. Řešení soustavy (5.29) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), x_{13}(t)) = (-1, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t.$$

Druhý vlastní vektor $v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 2$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_2 E)v_2 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot v_2 = o.$$

Třetí řádek matice soustavy je opačným prvním řádkem a soustavu lze redukovat na

$$\begin{array}{rcrcrcl} -v_{21} & - & v_{22} & + & v_{23} & = & 0, \\ & - & 2v_{22} & & & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_2 = (1, 0, 1)^T$. Řešení soustavy (5.29) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_2(t) = (x_{21}(t), x_{22}(t), x_{23}(t)) = (1, 0, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t}.$$

Přejděme k nalezení posledního vlastního vektoru $v_3 = (v_{31}, v_{32}, v_{33})^T$, odpovídajícího vlastnímu číslu $\lambda_3 = -2$. Je to libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_3 E)v_3 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot v_3 = o.$$

Přičtením dvojnásobku druhého řádku k prvnímu dostáváme třetí řádek matice soustavy. Soustavu lze tedy redukovat na tvat

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3v_{31} & - & v_{32} & + & v_{33} & = & 0, \\ -v_{31} & + & v_{32} & + & v_{33} & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_3 = (-1, -2, 1)^T$. Řešení soustavy (5.29) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_3(t) = (x_{31}(t), x_{32}(t), x_{33}(t)) = (-1, -2, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{-2t}.$$

Fundamentální systém řešení soustavy (5.29) je tvořen trojicí lineárně nezávislých řešení

$$(-1, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t, \;\; (1, 0, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t} \quad \text{a} \quad (-1, -2, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{-2t}$$

a její obecné řešení $x(t)$ je dáno lineární kombinaci

$$x(t) = C_1(-1, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t + C_2(1, 0, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_3(-1, -2, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{-2t} = \\ C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-2t}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3. Na závěr ještě rozepišme poslední vztah po složkách. Protože $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$, máme

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1(t) & = & - \; C_1\,\mathrm{e}^t & + & C_2\,\mathrm{e}^{2t} & - & C_3\,\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_2(t) & = & C_1\,\mathrm{e}^t & & & - & 2C_3\,\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_3(t) & = & C_1\,\mathrm{e}^t & + & C_2\,\mathrm{e}^{2t} & + & C_3\,\mathrm{e}^{-2t}. \end{array} \tag{5.30}$$

Příklad 5.6 *Nalezněte řešení soustavy rovnic (5.29) splňující podmínku*

$$x(0) = (1, 0, -1)^T. \tag{5.31}$$

Řešení. Obecné řešení této soustavy již bylo nalezeno v příkladu 5.5. Nyní je potřeba vybrat konstanty C_1, C_2 a C_3 tak, aby platil vztah

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zapišme poslední soustavu ve tvaru

$$\begin{array}{rcrcrcr} -C_1 & + & C_2 & - & C_3 & = & 1, \\ C_1 & & & - & 2C_3 & = & 0, \\ C_1 & + & C_2 & + & C_3 & = & -1. \end{array}$$

Jediné řešení této soustavy je

$$C_1 = -\frac{2}{3}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{1}{3}\,.$$

Po dosazení těchto hodnot například do vztahů (5.30) dostáváme jediné řešení splňující podmínku (5.31):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_2(t) &= -\frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{t} + \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{-2t}, \\ x_3(t) &= -\frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{t} - \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-2t}. \end{aligned}$$

Příklad 5.7 *Určete obecné řešení soustavy rovnic:*

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2 + x_3, \\ x_2' &= -2x_1 - x_2 - 2x_3, \\ x_3' &= x_1 + x_2 + 2x_3. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Řešení. Soustava (5.26) je speciálním případem soustavy (5.1) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \text{(po úpravě)} \; = -(\lambda - 1)^3 = 0.$$

Vlastní číslo je jen jedno: $\lambda = \lambda_{1,2,3} = 1$ a je trojnásobné.
Hledejme odpovídající vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T.$$

Bude jím libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o. \tag{5.33}$$

Snadno lze ověřit, že matice soustavy (5.33) má hodnost $h = 1$ a nulitu $\nu = 3 - 1 = 2$. Vlastnímu číslu tedy budou odpovídat dva lineárně nezávislé vlastní vektory. Jsou jimi například vektory $v_1^{1*} = (-1, 0, 1)^T$ a $v_1^{2*} = (0, 1, -1)^T$. Jeden z vlastních vektorů však musí být zobecněným vlastním vektorem hodnosti 2. Bude to takový vektor, pro který existuje netriviální řešení v_2 jedné ze soustav

$$(A - \lambda E)v_2 \;=\; v_1^{i*}, \quad i = 1, 2. \tag{5.34}$$

Snadno ověříme, že každá soustava (5.34) má pouze triviální řešení $v_2 = (0, 0, 0)$. Výběr vlastních vektorů v_1^{i*}, $i = 1, 2$ tedy neumožňuje najít nenulový vektor v_2, přestože dle teoretických poznatků takový vektor musí (je-li pravá strana vhodně zvolena) existovat. Pokusme se vybrat pravou stranu v soustavě (5.34) tak, aby nenulový vektor v_2 existoval. Libovolná lineární kombinace

$$\alpha v_1^{1*} + \beta v_1^{2*}$$

je opět vlastním vektorem (který je pro $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ nenulový). Jinými slovy - tato lineární kombinace je obecným řešením soustavy (5.33). Pokusme se určit parametry α a β tak, aby soustava

$$(A - \lambda E)v_2 \;=\; \alpha v_1^{1*} + \beta v_1^{2} \tag{5.35}$$

měla nenulové řešení. Aplikací Frobeniovy věty (hodnost matice soustavy se rovná hodnosti matice rozšířené) ihned dospíváme k požadavku $\alpha = \beta/2$. Volme například $\beta = 2$, $\alpha = 1$ a místo původní dvojice vlastních vektorů v_1^{i*}, $i = 1, 2$ definujme novou dvojici

$$v_1^1 = v_1^{1*}, \quad v_1^2 = v_1^{1*} + 2v_1^{2*} = (-1, 2, -1)^T.$$

Soustava

$$(A - \lambda E)v_2 \;=\; v_1^2 \tag{5.36}$$

má netriviální řešení $v_2 = (-1, 1, -1)$. Fundamentální systém řešení soustavy (5.26) je tvořen trojicí vektorů

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t, \quad \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t \right] \cdot \mathrm{e}^t.$$

Obecné řešení je dáno lineární kombinaci

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= -(C_1 + C_2 + C_3) \cdot \mathrm{e}^t - C_3 t \cdot \mathrm{e}^t, \\
x_2(t) &= (2C_2 + C_3) \cdot \mathrm{e}^t + 2C_3 t \cdot \mathrm{e}^t, \\
x_3(t) &= (C_1 - C_2 - C_3) \cdot \mathrm{e}^t - C_3 t \cdot \mathrm{e}^t.
\end{aligned}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3.

5.10 Cvičení

Příklad 1 *Metodou vlastních vektorů najděte řešení systému*

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 8y_2, \\ y_2' &= -y_1 - 3y_2 \end{aligned}$$

splňující podmínku $y_1(0) = 6$, $y_2(0) = -2$.

Řešení. Hledané řešení má tvar

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 4e^t + 2e^{-t}, \\ y_2(t) &= -e^t - e^{-t}. \end{aligned}$$

Příklad 2 *Metodou vlastních vektorů najděte obecné řešení systému*

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 - 2y_3, \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 + 2y_3, \\ y_3' &= y_1 - y_2 + y_3. \end{aligned}$$

Řešení. Obecné řešení systému má tvar

$$\begin{aligned} y_1(t) &= [K_1(1-t) + K_2 t - 2K_3]e^{-t}, \\ y_2(t) &= [K_1 t + K_2(1-t) + 2K_3]e^{-t}, \\ y_3(t) &= [K_1 t - K_2 t + K_3(1+2t)]e^{-t}. \end{aligned}$$

Příklad 3 *Metodou vlastních vektorů najděte obecné řešení systému*

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_3 + 2y_4, \\ y_2' &= -y_1 + y_2 + y_3 - 2y_4, \\ y_3' &= 2y_2 + 2y_3 - 3y_4, \\ y_4' &= -y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 3y_4. \end{aligned}$$

Řešení. Obecné řešení systému má tvar

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (K_1 + K_2 + 2K_4)\sin t + (-K_1 + K_2 + 2K_3)\cos t, \\ y_2(t) &= -(K_2 + K_3)\sin t + (K_1 + K_4)\cos t, \\ y_3(t) &= (K_3 + K_4)\sin t + (K_3 - K_4)\cos t, \\ y_4(t) &= -K_2 \sin t + K_1 \cos t. \end{aligned}$$

6 Weyrova maticová metoda

6.1 Cíl kapitoly

Postup vedoucí k nalezení fundamentálního systému řešení soustavy rovnic (5.1), který byl uveden v předchozí kapitole naprosto postačuje v případě, že uvažované soustavy rovnic mají malý počet rovnic. V případě většího počtu rovnic může být, například, komplikací určení hodnosti zobecněného vlastního vektoru v ve vztazích (5.18)–(5.21). (V příkladech, řešených v předchozí části tato skutečnost nebyla na závadu. Příslušné hodnosti se daly snadno určit porovnáním násobností kořenů a počtu vlastních vektorů.) Tento problém nevzniká v metodě, kterou nyní popíšeme a jejjíž zvládnutí je cílem této kapitoly. Je nazývaná *Weyrovou maticovou metodou* a umožnuje celkové zmechanizování hledání fundamentálního systému. Fakticky se jedná o doplnění a modifikování předchozího postupu, na který se budeme odvolávat.

6.2 Schéma Weyrovy maticové metody

Předpokládejme, že λ je k-násobným ($2 \le k \le n$) kořenem charakteristické rovnice (5.7). Utvořme posloupnost matic

$$
\begin{aligned}
&(A-\lambda E)^0 = E,\\
&(A-\lambda E)^1 = A-\lambda E,\\
&(A-\lambda E)^2,\\
&(A-\lambda E)^3,\\
&\dots\\
&(A-\lambda E)^m,
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

kde číslo m určíme tak, aby matice $(A-\lambda E)^m$ měla hodnost $n-k$. Přiřaďme jim posloupnost jejich hodností

$$h_0, h_1, h_2, h_3, \dots, h_m.$$

V této posloupnosti je $n = h_0$. Lze dokázat, že pro tyto hodnosti platí

$$h_0 > h_1 > h_2 > h_3 > \dots > h_m = n-k$$

a že pro posloupnost nulit uvedených matic (viz vysvětlení následující za vztahem (5.26)) je

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots < \nu_m = k.$$

Počet matic v posloupnosti (6.1) je $m+1$. Definujme dále čísla

$$\sigma_1 = \nu_1 - \nu_0, \sigma_2 = \nu_2 - \nu_1, \dots, \sigma_m = \nu_m - \nu_{m-1},$$

která se nazývají **charakteristiky matice** A (odpovídající vlastnímu číslu λ). Platí pro ně vztahy:

$$\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \dots \ge \sigma_m$$

a

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m = k. \tag{6.2}$$

Charakteristiky matice A určují rozmístění řetězců zobecněných vlastních vektorů v_{js}, $j = 1, 2, \ldots, m$, $s = 1, 2, \ldots, \sigma_j$, odpovídajících zobecněných vlastním vektorům

$$v_{m1}, \ldots, v_{m\sigma_m}, v_{m-1,\sigma_m+1}, \ldots, v_{m-1,\sigma_{m-1}}, \ldots, v_{2\sigma_2}, \ldots, v_{1\sigma_1}, \tag{6.3}$$

které jsou rozmístěny v tabulce, která má m řádků a σ_1 sloupců:

$$\begin{array}{|l|l|c|l|l|c|l|c|l|c|l|}
\hline
v_{11} & v_{12} & \vdots & v_{1\sigma_m} & v_{1,\sigma_m+1} & \vdots & v_{1,\sigma_{m-1}} & \vdots & v_{1\sigma_2} & \vdots & v_{1\sigma_1} \\
\hline
v_{21} & v_{22} & \vdots & v_{2\sigma_m} & v_{2,\sigma_m+1} & \vdots & v_{2,\sigma_{m-1}} & \vdots & v_{2\sigma_2} \\
\cline{1-9}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cline{1-8}
v_{m-1,1} & v_{m-1,2} & \vdots & v_{m-1,\sigma_m} & v_{m-1,\sigma_m+1} & \vdots & v_{m-1,\sigma_{m-1}} \\
\cline{1-7}
v_{m1} & v_{m2} & \vdots & v_{m\sigma_m} \\
\cline{1-4}
\end{array} \quad . \tag{6.4}$$

Počet vektorů v každém řádku je určen příslušnou charakteristikou. Je-li například $\sigma_2 = 4$, znamená to, že ve druhém řádku (určeném indexem charakteristiky) tabulky (6.4) jsou čtyři (lineárně nezávislé) vektory. Obecně je v j-tém řádku tabulky celkem σ_j vektorů. Protože je součet všech charakteristik roven k (viz vztah (6.2)), počet všech vektorů v tabulce je také roven číslu k, tj. násobnosti vlastního čísla λ. Každý vektor v tabulce (6.4) je nenulový.

6.2.1 Konstrukce tabulky Weyrovy metody

Každý sloupec tabulky (6.4) je řetězcem zobecněných vlastních vektorů, odpovídajícím zobecněnému vlastnímu vektoru, kterým sloupec končí. Protože jsou **hodnosti** zobecněných vlastních vektorů **známy**, můžeme při výpočtu řetězců postupovat tak, jako v části 5.7 Je však možné výpočet modifikovat a postupovat například takto:

1. Nejprve **určit poslední vektor v každém sloupci** - tedy určit zobecněné (lineárně nezávislé) vlastní vektory uvedené v (6.3). To znamená, že je nutné pro každou hodnotu indexu $j = 1, 2, \ldots, m$ najít netriviální vektor, vyhovující rovnici

   $$(A - \lambda E)^j v_{js} = 0, \ \ s = \sigma_{j+1} + 1, \sigma_{j+1} + 2, \ldots, \sigma_j, \tag{6.5}$$

   kde položíme $\sigma_{m+1} = 0$ v případě, že je voleno $j = m$. Pro úplnost ještě dodejme, že v případě když $\sigma_{j+1} + 1 > \sigma_j$ není vztah (6.5) definován.

2. Následně **určit všechny předcházející vektory v každém sloupci**. Tj. pro každou hodnotu dvojice indexů (j, s), kde $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ a $s \in \{\sigma_{j+1} + 1, \sigma_{j+1} + 2, \ldots, \sigma_j\}$, kde položíme $\sigma_{m+1} = 0$ v případě, že je voleno $j = m$ najít řetězec netriviálních vektorů pomocí vztahů

   $$v_{\ell-1,s} = (A - \lambda E)v_{\ell s}, \ \ \ell = j, j-1, \ldots, 2. \tag{6.6}$$

Následující věta je analogií Věty 5.3 a Věty 5.4. Poznamenejme, že výše uvedenou konstrukci je možné formálně aplikovat i v případě nenásobných kořenů, i když výsledek aplikace bude stejný jako v částech 5.3 a 5.4. Tuto poznámku děláme jen kvůli úplnosti metody.

Věta 6.1 *Předpokládejme, že λ je k-násobným kořenem charakteristické rovnice (5.7) a že jsou nalezeny všechny vektory (netriviální) uvedené v tabulce (6.4). Pak je pro každou (fixovanou) hodnotu dvojice indexů (j,s), kde $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ a $s \in \{\sigma_{j+1}+1, \sigma_{j+1}+2,\ldots,\sigma_j\}$, kde položíme $\sigma_{m+1}=0$ v případě, že je voleno $j=m$ systém vektorových funkcí*

$$\begin{aligned} y_{1s} &:= v_{1s}\,\mathrm{e}^{\lambda t},\\ y_{2s} &:= (v_{1s}\cdot t + v_{2s})\,\mathrm{e}^{\lambda t},\\ &\ldots\\ y_{js} &:= \left(v_{1s}\cdot\frac{t^{j-1}}{(j-1)!} + v_{2s}\cdot\frac{t^{j-2}}{(j-2)!} + \cdots + v_{j-1,s}\cdot t + v_{js}\right)\mathrm{e}^{\lambda t} \end{aligned} \tag{6.7}$$

systémem lineárně nezávislých řešení systému (5.1). Jestliže zkonstruujeme systém lineárně nezávislých řešení (6.7) systému (5.1) pro každou (fixovanou) hodnotu dvojice indexů (j,s), kde $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ a $s \in \{\sigma_{j+1}+1, \sigma_{j+1}+2,\ldots,\sigma_j\}$, dostaneme celkem k lineárně nezávislých řešení (5.1), tedy tolik řešení jaká je násobnost kořene λ. Fundamentální systém řešení je sjednocení všech množin lineárně nezávislých řešení odpovídajících všem kořenům charakteristické rovnice (5.7).

Poznámka 6.1 *Následující poznámka je terminologická. V některých příručkách se (na rozdíl od námi zavedené terminologie) užívá termín **zobecněné vlastní vektory** pro vektory y_{1s}, y_{2s},…, y_{js} systému (6.7) a nikoli pro **řetězec zobecněných vlastních vektorů** v_{1s}, v_{2s},…, v_{js} (viz (5.20)).*

6.3 Shrnutí kapitoly

Tato kapitola byla poslední kapitolou věnovanou lineárním systémům. Byl probrán efektivní algoritmus konstrukce fundamentální množiny řešení a obecného řešení. Pro její úspěšné použití bylo nutné vytvořit posloupnost matic (6.1), vypočítat charakteristiky matice A a sestavit tabulku (6.4). Poslední fází bylo nalezení systému řešení (6.7) a sestavení obecného řešení.

6.4 Řešené příklady

Příklad 6.1 *Určete obecné řešení soustavy rovnic:*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 + x_3,\\ x_2' &= x_1 + x_2 - x_3,\\ x_3' &= - x_2 + 2x_3. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Řešení. Soustava (6.8) je speciálním případem soustavy (5.1) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \text{ (po úpravě) } = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0.$$

Vlastní čísla jsou: nenásobné číslo $\lambda_1 = 2$ a dvojnásobné číslo $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Hledejme vlastní vektor

$$v_1^* = (v_{11}^*, v_{12}^*, v_{13}^*)^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$. Je to libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1^* = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_1^* = o.$$

Druhý řádek matice soustavy je lineární kombinací prvního a třetího řádku. Proto lze soustavu redukovat na

$$\begin{array}{rcrcrcl} -v_{11}^* & & & + & v_{13}^* & = & 0, \\ & - & v_{12}^* & & & = & 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_1^* = (1, 0, 1)^T$. Řešení soustavy (6.8) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), x_{13}(t)) = (1, 0, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t}.$$

Dále na základě Weyrovy metody určíme řešení odpovídající dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_{2,3} = 1$. Matice

$$A - \lambda_{2,3}E = A - E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

má hodnost $h_1 = 2$. Posloupnost hodností ukončíme ve chvíli,kdy $h_m = n - k = 3 - 2 = 1$. Protože $h_1 = 2 \neq 1$ určíme další člen této posloupnosti. Nalézáme matici

$$(A - \lambda_{2,3}E)^2 = (A - E)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Její hodnost $h_2 = 1 = n - k$ a $m = 2$. To znamená, že již není potřeba určovat další člen posloupnosti a příslušná tabulka (6.4) bude mít dva řádky. Sestavme posloupnost příslušných nulit:

$$\nu_0 = 0, \nu_1 = 1, \nu_2 = 2$$

a posloupnost charakteristik

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1.$$

V prvém i ve druhém řádku tabulky (6.4) bude jen po jednom pomocném vektoru a tabulka bude mít tvar:

$$\begin{array}{||c||} \hline v_{11} \\ \hline v_{21} \\ \hline \end{array}\;.$$

Vektor $v_{21} = (v_{21}^1, v_{22}^2, v_{23}^3)^T$ určíme ze vztahu (6.5) ve kterém položíme $j = 2$ a $s = 1$ (tato kombinace indexů je jedinou přípustnou kombinací):

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot v_{21} = o. \tag{6.9}$$

Nenulové řešení je například $v_{21} = (1, 1, 1)^T$. Určeme vektor $v_{11} = (v_{11}^1, v_{12}^2, v_{13}^3)^T$ pomocí vztahů (6.6), kde $j = 2$, $s = 1$ a tedy jediná možná volba je $\ell = 2$. Tedy

$$v_{11} = (A - \lambda E)v_{21} = (A - E)v_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} v_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nalezený vektor je bohužel triviální. Abychom obdrželi netriviální vektor, musíme změnit volbu vektoru v_{21}. Obecné řešení systému (6.9) je dvouparametrickou množinou. Vektor $v_{21} = (1, -1, 0)^T$ je také řešením systému (6.9) a vektor

$$v_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} v_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

je již netriviální. Aplikujme nyní Větu 6.1 a utvořme systém vektorových funkcí (6.7):

$$\begin{array}{rcl} y_{11} & := & v_{11} \cdot \mathrm{e}^t & = & (1, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t, \\ y_{21} & := & (v_{11} \cdot t + v_{21})\, \mathrm{e}^t & = & \left((1, 1, 1)^T \cdot t + (1, -1, 0)^T\right) \cdot \mathrm{e}^t. \end{array}$$

Všechna tři řešení $x_1(t)$, y_{11} a y_{21} soustavy (6.8) tvoří její fundamentální systém řešení. Obecné řešení soustavy (6.8) je dáno lineární kombinaci

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 y_{11} + C_3 y_{21} = C_1 (1, 0, 1)^T \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_2 (1, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t + C_3 \left((1, 1, 1)^T \cdot t + (1, -1, 0)^T\right) \cdot \mathrm{e}^t =$$

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t + C_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \mathrm{e}^t = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^t & (t+1)\,\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t & (t-1)\,\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^t & t\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3.

Příklad 6.2 *Určete obecné řešení soustavy rovnic:*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2, \\ x_2' &= + 4x_2 - x_3, \\ x_3' &= -x_1 + 3x_2 + x_3. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Řešení. Soustava (6.10) je speciálním případem soustavy (5.1) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \text{(po úpravě)} = -(\lambda - 2)^3 = 0.$$

Vlastní číslo je jen jedno a je trojnásobné tj. $\lambda = \lambda_{1,2,3} = 2$. Na základě Weyrovy metody určíme řešení odpovídající trojnásobnému vlastnímu číslu. Matice

$$A - \lambda_{1,2,3}E = A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

má hodnost $h_1 = 2$. Nulita $\nu_1 = n - h_1 = 3 - 2 = 1$ a charakteristika matice $\sigma_1 = \nu_1 - \nu_0 = 1 - 0 = 1$. To znamená, že v prvním řádku tabulky (6.4) je jen jeden pomocný vektor v_{11}. Vzhledem k tomu, že vlastní číslo je trojnásobné a že počet vektorů v tabulce (6.4) nemůže být v následujícím řádku vyšší než v předcházejícím můžeme bez výpočtu stanovit: $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 1$ a $m = 3$. Tabulka (6.4) má tvar

v_{11}
v_{21}
v_{31}

.

V tomto případě jsme určili rozmístění pomocných vektorů bez toho, abychom sestavovali odpovídající posloupnost matic (6.1). Násobení matic $A - 2E$, které potřebujeme ve vztahu (6.5) s $j = 3$ a $s = 1$ tj.

$$(A - 2E)^3 v_{31} = o$$

k určení vektoru v_{31} se v tomto případě vyhneme také. Ze vztahu $\sigma_2 = \nu_2 - \nu_1$ máme $\nu_2 = 2$ a ze vztahu $\sigma_3 = \nu_3 - \nu_2$ dostáváme $\nu_3 = 3$. Pak pro hodnosti platí $h_2 = n - \nu_2 = 1$ a $h_3 = n - \nu_3 = 0$. Poslední vztah však znamená, že hodnost matice $(A - 2E)^3$ je nula. Jinými slovy tato matice je nulová, a proto je možné volit vektor v_{31} libovolně. Definujme

$$v_{31} = (1, 0, 0)^T.$$

Vektor $v_{21} = (v_{21}^1, v_{22}^2, v_{23}^3)^T$ určíme pomocí vztahů (6.6), kde $j = 3$ a $s = 1$:

$$v_{21} = (A - \lambda E)v_{31} = (A - 2E)v_{31} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Určeme vektor $v_{11} = (v_{11}^1, v_{12}^2, v_{13}^3)^T$ pomocí vztahů (6.6), kde $j = 2$, $s = 1$:

$$v_{11} = (A - \lambda E)v_{21} = (A - 2E)v_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aplikujme nyní Větu 6.1 a utvořme systém vektorových funkcí (6.7):

$$\begin{aligned}
y_{11} &:= v_{11} \cdot \mathrm{e}^{2t} = (1,1,2)^T \cdot \mathrm{e}^{2t}, \\
y_{21} &:= (v_{11} \cdot t + v_{21}) \cdot \mathrm{e}^{2t} = \left((1,1,2)^T \cdot t + (-1,0,-1)^T\right) \cdot \mathrm{e}^{2t} \\
y_{31} &:= \left(v_{11} \cdot \frac{t^2}{2} + v_{21} \cdot t + v_{31}\right) \cdot \mathrm{e}^{2t} = \left((1,1,2)^T \cdot \frac{t^2}{2} + (-1,0,-1)^T \cdot t + (1,0,0)^T\right) \cdot \mathrm{e}^{2t}.
\end{aligned}$$

Všechna tři řešení soustavy (6.10) tvoří její fundamentální systém řešení. Obecné řešení je dáno lineární kombinaci

$$x(t) = C_1 y_{11}(t) + C_2 y_{21} + C_3 y_{31} = C_1 (1,1,2)^T \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_2 \left((1,1,2)^T \cdot t + (-1,0,-1)^T\right) \cdot \mathrm{e}^{2t} +$$
$$C_3 \left((1,1,2)^T \cdot \frac{t^2}{2} + (-1,0,-1)^T \cdot t + (1,0,0)^T\right) \cdot \mathrm{e}^{2t} =$$
$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \mathrm{e}^{2t} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & t-1 & \dfrac{t^2}{2} - t + 1 \\ 1 & t & \dfrac{t^2}{2} \\ 2 & 2t-1 & t^2 - t \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{t} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3.

Příklad 6.3 *Najděte řešení soustavy rovnic:*

$$\begin{aligned}
x_1' &= 2x_1 - x_2 - x_3, \\
x_2' &= -x_1 + 2x_2 + x_3, \\
x_3' &= 2x_1 - 2x_2 - x_3,
\end{aligned} \tag{6.11}$$

vyhovující Cauchyovým podmínkám $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 2$.

Řešení. Soustava (6.11) je speciálním případem soustavy (5.1) pro $n = 3$ s matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \text{ (po úpravě) } = -(\lambda - 1)^3 = 0.$$

Vlastní číslo je jen jedno a je trojnásobné tj. $\lambda = \lambda_{1,2,3} = 1$. Matice

$$A - \lambda_{1,2,3}E = A - E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

má hodnost $h_1 = 1$. Nulita $\nu_1 = n - h_1 = 3 - 1 = 2$ a charakteristika matice $\sigma_1 = \nu_1 - \nu_0 = 2 - 0 = 2$. To znamená, že v prvním řádku tabulky (6.4) jsou dva pomocné vektory v_{11}, v_{12} a ve druhém řádku je jen jeden pomocný vektor v_{21}. Proto můžeme hned stanovit: $\sigma_2 = 1$. Tabulka (6.4) má tvar

v_{11}	v_{12}
v_{21}	

.

Dále: $m = 2$, $\nu_2 = \sigma_2 + \nu_1 = 1 + 2 = 3$ a $h_2 = n - \nu_2 = 3 - 3 = 0$. Odtud vyplývá, že matice $(A - E)^2$ je nulová a vztah

$$(A - E)^2 v_{21} = o,$$

který je důsledkem vztahu (6.5) s $j = 2$ a $s = 1$ je ekvivalentní vztahu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_{21} = o,$$

a jeho řešením je libovolný vektor v_{21}. Při jeho výběru musíme dát pozor na to, aby předcházející vektor v_{11}, který určíme pomocí vztahů (6.6), kde $j = 2$ a $s = 1$ nebyl nulový. Položíme-li například $v_{21} = (1, 0, 0,)^T$, potom

$$v_{11} = (A - \lambda E)v_{21} = (A - E)v_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aplikujme nyní Větu 6.1 a utvořme systém lineárně nezávislých vektorových funkcí (6.7) odpovídajících prvnímu sloupci tabulky:

$$y_{11} := v_{11} \cdot \mathrm{e}^t = (1, -1, 2)^T \cdot \mathrm{e}^t,$$
$$y_{21} := (v_{11} \cdot t + v_{21}) \cdot \mathrm{e}^t = \left((1, -1, 2)^T \cdot t + (1, 0, 0)^T\right) \cdot \mathrm{e}^t.$$

Třetí řešení sestavíme pomocí druhého sloupce tabulky, ve kterém je jen jeden pomocný vektor v_{12}. Jde tedy o vlastní vektor. I nyní můžeme formálně aplikovat vztah (6.5) s $j = 1$ a $s = 2$ a určit netriviální vektor v_{12} tak, aby

$$(A - E)v_{12} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} v_{12} = o.$$

Takovým vektorem je například vektor $v_{12} = (1, 1, 0)^T$ a příslušné řešení soustavy (6.11) je

$$y_{12} := v_{12} \cdot \mathrm{e}^t = (1, 1, 0)^T \cdot \mathrm{e}^t.$$

Zapišme obecné řešení soustavy (6.11) ve skalární formě:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1(t) & = & C_1\,\mathrm{e}^t & + & C_2(t+1)\,\mathrm{e}^t & + & C_3\,\mathrm{e}^t, \\ x_2(t) & = & -C_1\,\mathrm{e}^t & - & C_2 t\,\mathrm{e}^t & + & C_3\,\mathrm{e}^t, \\ x_3(t) & = & 2C_1\,\mathrm{e}^t & + & 2C_2 t\,\mathrm{e}^t, & & \end{array}$$

kde C_1, C_2 a C_3 jsou libovolné konstanty. Nakonec určíme konkrétní hodnoty konstant C_1, C_2 a C_3 tak, aby získané partikulární řešení vyhovovalo daným počátečním podmínkám. Pro $t = 0$ musí platit

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1(0) & = & C_1 & + & C_2 & + & C_3 & = & 2, \\ x_2(0) & = & -C_1 & & & + & C_3 & = & 1, \\ x_3(0) & = & 2C_1 & & & & & = & 2. \end{array}$$

Jediným řešením této soustavy jsou hodnoty $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ a $C_3 = 2$. Hledané partikulární řešení je proto:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1(t) & = & \mathrm{e}^t & - & (t+1)\,\mathrm{e}^t & + & 2\,\mathrm{e}^t & = & \mathrm{e}^t(2-t), \\ x_2(t) & = & -\,\mathrm{e}^t & + & t\,\mathrm{e}^t & + & 2\,\mathrm{e}^t & = & \mathrm{e}^t(t+1), \\ x_3(t) & = & 2\,\mathrm{e}^t & - & 2t\,\mathrm{e}^t & & & = & 2\,\mathrm{e}^t(1-t). \end{array}$$

6.5 Cvičení

Příklad 1 *Weyrovou metodou najděte řešení systému*

$$\begin{array}{rcrcr} y_1' & = & 3y_1 & + & 4y_2, \\ y_2' & = & -2y_1 & - & 3y_2 \end{array}$$

splňující podmínku $y_1(0) = 3$, $y_2(0) = -2$.

Řešení. Hledané řešení má tvar

$$\begin{array}{rcl} y_1(t) & = & 2e^t + e^{-t}, \\ y_2(t) & = & -e^t - e^{-t}\,. \end{array}$$

Příklad 2 *Weyrovou metodou najděte obecné řešení systému*

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1' &=& -2y_1 &+& 3y_2 &-& 6y_3, \\ y_2' &=& y_1/3 &-& 2y_2 &+& 2y_3, \\ y_3' &=& y_1/3 &-& y_2 &+& y_3. \end{array}$$

Řešení. Obecné řešení systému má tvar

$$\begin{array}{rcl} y_1(t) &=& 3[K_1(1-t) + K_2 t - 2K_3]e^{-t}, \\ y_2(t) &=& [K_1 t + K_2(1-t) + 2K_3]e^{-t}, \\ y_3(t) &=& [K_1 t - K_2 t + K_3(1+2t)]e^{-t}\,. \end{array}$$

Příklad 3 *Weyrovou metodou najděte obecné řešení systému*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1' &=& & - & y_2 &+& y_3, & & \\ y_2' &=& -2y_1 &+& y_2 &+& y_3 &-& y_4, \\ y_3' &=& 2y_1 &-& y_2 &-& y_3 &+& y_4, \\ y_4' &=& & & 2y_2 &-& 2y_3\,. & & \end{array}$$

Řešení. Obecné řešení systému má tvar

$$\begin{array}{rcl} y_1(t) &=& K_1(1+2t^2) + 2K_2 t + K_3 + K_4, \\ y_2(t) &=& -2K_1 t - K_2 + K_4, \\ y_3(t) &=& 2K_1 t + K_2 + K_4, \\ y_4(t) &=& -4K_1 t^2 - 4K_2 t - 2K_3\,. \end{array}$$

7 Besselova rovnice a Besselovy funkce

7.1 Cíl kapitoly

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře se speciálním typem diferenciální rovnice druhého řádu, Besselovou rovnicí. Ukážeme, že řešení této rovnice se hledá pomocí nekonečné řady. Zmíníme se o tzv. gama funkci, která se v řešení Besselovy rovnice objevuje. Popíšeme Besselovy funkce, pomocí nichž je řešení Besselovy rovnice popsáno.

7.2 Funkce gama

Na tomto místě se budeme chvíli věnovat tzv. funkci gama, kterou využijeme při řešení Besselovy rovnice. Pokud je vám tato funkce důvěrně známa, můžete následující odstavec přeskočit.
Funkce gama se definuje jako

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{7.1}$$

Funkce $\Gamma(x)$ je tímto integrálem definována pro $x > 0$ (pro $x \leq 0$ integrál diverguje) a je pro $x > 0$ spojitá.
Pomocí integrace per partes můžeme ukázat (odvážnější nechť se o to sami pokusí), že

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{7.2}$$

Pro $x = 1$ máme

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1,$$

takže podle (7.2) je

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1, \quad \Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad \text{atd.}$$

Vidíme, že pro celá kladná čísla n platí

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{7.3}$$

Funkce gama je tedy jakýmsi zobecněním faktoriálu.

7.3 Besselova rovnice

Při popisu mnohých fyzikálních jevů hraje důležitou roli diferenciální rovnice

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \tag{7.4}$$

Tato rovnice se nazývá **Besselova**. Budeme předpokládat, že $\nu \geq 0$. Řešení vyjádříme pomocí mocninné řady se středem v 0. Bod $x = 0$ je tzv. regulárním singulárním bodem Besselovy rovnice.

7.3.1 Konstrukce řešení ve tvaru řady

Řešení Besselovy rovnice můžeme hledat ve tvaru

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \tag{7.5}$$

nebo (vytkneme-li výraz x^r) ve tvaru

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

kde koeficienty řady c_n a číslo r určíme v průběhu výpočtů.

7.3.2 Výpočet koeficientů řady

Abychom řadu (7.5) mohli dosadit do rovnice (7.4), potřebujeme její první a druhou derivaci:

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r-1} \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Nyní vše dosadíme do rovnice (7.4). Upozorňujeme, že úpravy budou dlouhé a budou vyžadovat vaši pozornost a trpělivost.

$$\begin{aligned} & x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r-1} + (x^2 - \nu^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = *. \end{aligned}$$

x^2 a x před sumami zahrneme dovnitř sum, $(x^2 - \nu^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ roznásobíme:

$$* = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = *$$

Člen obsahující x^r (vyskytuje se pro $n = 0$ ve všech sumách kromě třetí) oddělíme; tím se v některých sumách začne sčítat až od 1. Ze všech sum vytkneme x^r:

$$\begin{aligned} * = c_0 (r(r-1) + r - \nu^2) x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^n + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n (n+r) x^n + \\ + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} - x^r \nu^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = * \end{aligned}$$

Zjednodušíme koeficient u x^r a sloučíme sumy, u kterých to bez potíží lze:

$$* = c_0(r^2-\nu^2)x^r + x^r\sum_{n=1}^{\infty} c_n((n+r)(n+r-1)+(n+r)-\nu^2)x^n + x^r\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}.$$

Ještě zjednodušíme výraz v první sumě a dostáváme:

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y = c_0(r^2-\nu^2)x^r + x^r\sum_{n=1}^{\infty} c_n((n+r)^2-\nu^2)x^n + x^r\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}. \tag{7.6}$$

Z tzv. **charakteristické rovnice**

$$r^2-\nu^2=0$$

určíme hodnotu čísla r. Vidíme, že kořeny charakteristické rovnice jsou $r_1=\nu$ a $r_2=-\nu$. Pro $r=\nu$ z (7.6) zbude

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y = x^\nu\sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n+2\nu)x^n + x^\nu\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}.$$

Výraz na pravé straně budeme dále upravovat. Abychom mohli obě sumy sloučit do jedné, posuneme v první z nich sumační index o dvě – zavedeme nový sumační index $k=n-2$. Sumační index ve druhé sumě přeznačíme z n na k. Z první sumy pak dáme stranou to, co oproti druhé sumě „přečuhuje“, což nám umožní převést konečně všechno na jednu sumu.

$$\begin{aligned}
x^\nu\sum_{k=-1}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+2+2\nu)x^{k+2} + x^\nu\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} = \\
= x^\nu\left(c_1(1+2\nu)x + \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+2+2\nu)x^{k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2}\right) = \\
= x^\nu\left(c_1(1+2\nu)x + \sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+2+2\nu)c_{k+2}+c_k]x^{n+2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Jestli vás nějak překvapilo to „$=0$“ na konci, možná jste v zápalu boje se sumami pozapomněli, že dosazujeme do rovnice (7.4). S velkou námahou jsme upravili levou stranu rovnice, a teď chceme, aby se rovnala straně pravé.

Aby byla uvedená rovnost splněna pro každé x, musí platit

$$\begin{aligned}
(1+2\nu)c_1 &= 0 \\
(k+2)(k+2+2\nu)c_{k+2}+c_k &= 0 \quad k=0,1,2,\dots
\end{aligned} \tag{7.7}$$

neboli

$$c_{k+2} = \frac{-c_k}{(k+2)(k+2+2\nu)}, \quad k=0,1,2,\dots . \tag{7.8}$$

Protože podle (7.7) je $c_1=0$, postupným dosazováním do (7.8) pro $k=1,3,5,\dots$ dostaneme $c_3=c_5=c_7=\cdots=0$. Všechny liché členy řady jsou tedy nulové a zbývá nám prozkoumat sudé členy řady.

Označíme $k+2=2n$. Indexům $k=0,2,4,\ldots$ teď odpovídá $n=1,2,3,\ldots$. Vztah (7.8) můžeme (po vcelku jednoduché úpravě jmenovatele zlomku) zapsat jako

$$c_{2n} = \frac{-c_{2n-2}}{2^2 n(n+\nu)}, \quad n = 1,2,3,\ldots. \tag{7.9}$$

Tedy

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{c_0}{2^2\cdot 1\cdot(1+\nu)}, \\ c_4 &= -\frac{c_2}{2^2\cdot 2\cdot(2+\nu)} = \frac{c_0}{2^4\cdot 1\cdot 2(1+\nu)(2+\nu)}, \\ c_6 &= -\frac{c_4}{2^2\cdot 3\cdot(3+\nu)} = -\frac{c_0}{2^6\cdot 1\cdot 2\cdot 3(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}, \\ &\vdots \\ c_{2n} &= \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n!(1+\nu)(2+\nu)\cdots(n+\nu)}, \quad n=1,2,3,\ldots. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Konstantu c_0 bychom mohli zvolit libovolně, ale standardně se volí (ach, to se vám asi nebude líbit…)

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}.$$

7.4 Besselovy funkce

Teď, když už víme, co se skrývá pod zápisem $\Gamma(1+\nu)$, můžeme se vrátit k Besselově rovnici. Pokud zvolíme c_0 výše uvedeným způsobem, dostaneme využitím vztahu (7.2) pro další koeficienty:

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{1}{2^{2+\nu}\cdot 1\cdot(1+\nu)\Gamma(1+\nu)} = -\frac{1}{2^{2+\nu}\cdot 1\cdot\Gamma(2+\nu)}, \\ c_4 &= \frac{1}{2^{4+\nu}\cdot 2!\cdot(2+\nu)(1+\nu)\Gamma(1+\nu)} = \frac{1}{2^{4+\nu}\cdot 2!\cdot\Gamma(3+\nu)}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

a obecně, pro $n=0,1,2,\ldots,$

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu}\cdot n!\cdot(n+\nu)\cdots(2+\nu)(1+\nu)\Gamma(1+\nu)} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu}\cdot n!\cdot\Gamma(1+\nu+n)}.$$

Jedno řešení Besselovy rovnice je tedy

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n+\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}.$$

Pro $\nu \geq 0$ tato řada konverguje alespoň na intervalu $\langle 0,\infty)$.

Funkce popisující právě získané řešení se obvykle značí $J_\nu(x)$:

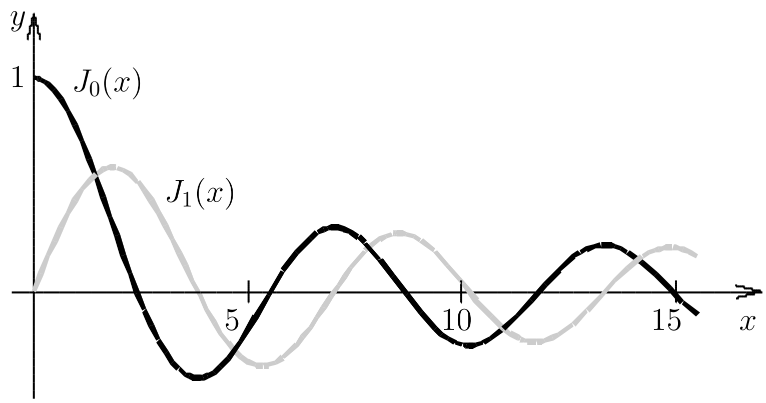
$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} . \tag{7.11}$$

Pro druhý kořen charakteristické rovnice rovnice, $r_2 = -\nu$, zcela analogicky dostaneme

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(1-\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu} . \tag{7.12}$$

Funkce $J_\nu(x)$ a $J_{-\nu}(x)$ se nazývají **Besselovy funkce prvního druhu** řádu ν, resp. $-\nu$.

Na obrázku 7.1 jsou grafy funkcí $y = J_0(x)$ a $y = J_1(x)$.



Obrázek 7.1: Besselovy funkce prvního druhu řádu 0 a 1

Dá se ukázat, že jestliže ν není celé číslo, funkce $J_\nu(x)$ a $J_{-\nu}(x)$ jsou lineárně nezávislé. V tomto případě je obecné řešení rovnice (7.4) na intervalu $(0,\infty)$

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x). \tag{7.13}$$

Příklad 7.1 *Najděte obecné řešení rovnice*

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$

na intervalu $(0,\infty)$.

Řešení: V našem případě je $\nu^2 = 1/4$, a tedy $\nu = 1/2$. Vidíme, že ν není celé číslo, a tedy obecné řešení zadané rovnice je

$$\underline{\underline{y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)}}.$$

7.5 Shrnutí kapitoly

V této kapitole jsme se seznámili s Besselovou rovnicí, která je speciálním typem diferenciální rovnice druhého řádu. Řešení této rovnice bylo nalezeno pomocí nekonečné řady. Funkce, kterými je toto řešení popsáno, se nazývají Besselovy funkce.

7.6 Cvičení

Příklad 1 *Najděte obecné řešení rovnice* $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0$.

Řešení. $y = c_1 J_{1/3}(x) + c_2 J_{-1/3}(x)$.

Příklad 2 *Najděte obecné řešení rovnice* $4x^2y'' + 4xy' + (4x^2 - 25)y = 0$.

Řešení. $y = c_1 J_{5/2}(x) + c_2 J_{-5/2}(x)$.

8 Stabilita řešení systémů diferenciálních rovnic

Uvažujme systém diferenciálních rovnice ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{8.1}$$

Daný konkrétní systém (8.1) může být matematickým modelem celé řady různých mechanických, elektrotechnických, biologických a jiných systémů. Chování těchto systémů je pak popsáno vlastním řešením systému (8.1), který může mít obecně nekonečně mnoho řešení, odpovídajících různým volbám jeho počátečního stavu.
U většiny systémů požadujeme, aby jejich chování bylo v nějakém smyslu blízké jednomu předem danému chování systému (např. setrvání v klidu, v periodickém pohybu, apod.).

Předpokládejme, že (8.1) je matematickým modelem nějakého fyzikálního systému S, jehož jeden pracovní režim je popsán daným řešením v systému (8.1). To znamená, že pro každé t udává vektor $v(t)$ hodnoty stavových proměnných v okamžiku t. V počátečním okamžiku t_0 nabývají stavové proměnné systému S hodnotu $v(t_0)$.

V praxi však tyto počáteční hodnoty stavových proměnných systému S získáme zpravidla měřením a takto naměřené hodnoty $\mathbf{x}_0$ jsou pouze aproximacemi skutečných hodnot $v(t_0)$. Spojitá závislost řešení na počáteční hodnotě zaručuje, že chyba, které se dopustíme při měření počátečních hodnot, nezkreslí podstatně informaci o charakteru vyšetřovaného řešení na konečném časovém intervalu.

Přesněji, ke každému předem danému intervalu $\langle t_0, t_1\rangle$ a ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta = \delta(\varepsilon, t_0, t_1) > 0$ tak, že když naměřené počáteční hodnoty $\mathbf{x}_0$ stavových proměnných $\mathbf{x}$ se budou v okamžiku t_0 lišit od skutečných počátečních hodnot $v(t_0)$ o méně než δ, budou se vypočtené hodnoty $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ stavových proměnných v okamžiku t lišit od skutečných hodnot stavových proměnných $v(t)$ $\forall t \in \langle t_0, t_1\rangle$ o méně než ε.
Velikou závadou tohoto odhadu je závislost odchylky δ počátečních hodnot na délce časového intervalu $\langle t_0, t_1\rangle$. Se zvětšováním délky intervalu jsme zpravidla nuceni zmenšovat číslo δ.

Z fyzikálních a technických důvodů je přirozené požadovat, aby číslo δ bylo dostatečně veliké i pro libovolně veliké délky časových intervalů $t_1 - t_0$. Proto se studuje taková závislost řešení na počátečních údajích $t_0, \mathbf{x}_0$, ve které odchylka δ závisí pouze na počátečním okamžiku t_0 a přípustné odchylce řešení ε a nezávisí na délce časového intervalu $t_1 - t_0$. Studium takové závislosti představuje náplň teorie stability.

Uveďme ještě jeden pohled na problematiku stability.
Předpokládejme, že na fyzikální systém S, popsaný přibližně systémem (8.1), působí nějaké poruchy vyvolané zásahy, které nejsme schopni do modelu zahrnout a při sestavování rovnic (8.1) je zanedbáváme. Kdybychom je totiž chtěli respektovat, pak bychom museli v každém okamžiku, ve kterém poruchy působí, provádět na našem modelu korekci např. v nastavení okamžitých hodnot stavových proměnných. To je velmi obtížně realizovatelné, a proto je vhodnější tyto poruchy zanedbat a určit, jak velké chyby se tímto zjednodušením dopouštíme. To je opět problematika, která spadá do rámce teorie stability.

V následujícím textu se budeme zabývat studiem různých typů stability řešení systému (8.1) a budeme předpokládat, že $\mathbf{f}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$, takže $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ má **triviální řešení**, které budeme značit $\mathbf{o}$.

Nejdříve ukážeme, že omezení našich úvah na studium stability triviálního řešení $\mathbf{o}$ nikterak nezmenšuje obecnost dalších úvah a přitom značně zjednodušuje symboliku i formulace.

Předpokládejme, že chceme vyšetřovat řešení v systému

$$\mathbf{y}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}) \tag{8.2}$$

definované na nějakém intervalu I. Proveďme v systému (8.2) substituci

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + v\,. \tag{8.3}$$

Jelikož funkce v je řešením systému (8.2), platí

$$v'(t) = \mathbf{g}(t, v(t)) \quad \forall t \in I\,,$$

a tedy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{y}' - v' = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{g}(t, v) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x} + v) - \mathbf{g}(t, v) \tag{8.4}$$

Označíme-li

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x} + v) - \mathbf{g}(t, v)\,,$$

dostaneme z 8.4 systém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\,, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}\,, \tag{8.5}$$

takže systém 8.5 má triviální řešení $\mathbf{o}$. Na toto triviální řešení se transformací 8.3 zobrazuje řešení v systému 8.2. Vyšetříme-li vlastnosti triviálního řešení $\mathbf{o}$ systému 8.5, pak pomocí transformace 8.3 můžeme vysledky přenést na řešení v systému 8.2.

Předpokládejme v následujícím, že existuje interval $I = (\alpha, \infty), \alpha \in \mathbb{R}$ a oblast $H \subset \mathbb{R}^n$ obsahující počátek tak, že zobrazení $\mathbf{f}$ je spojité na oblasti $G = I \times H$ a pro každý bod $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ je Cauchyova úloha

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\,, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\,, \tag{8.6}$$

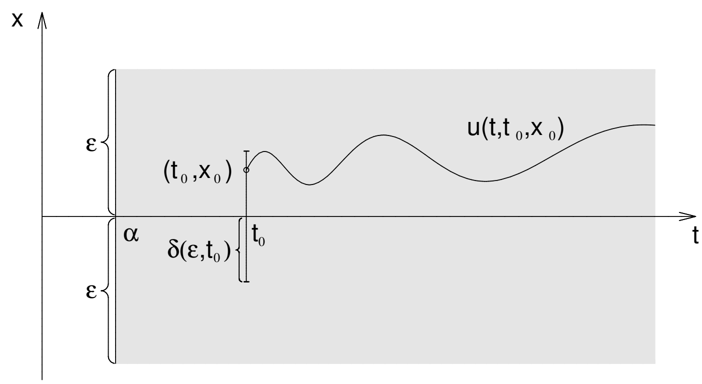
jednoznačně řešitelná a nechť $\mathbf{f}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$ $\forall t > \alpha$.

Definice 8.1 *Řekneme, že triviální řešení* $\mathbf{o}$ *systému*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{8.7}$$

je ***stabilní*** *(viz obrázek 8.1), jestliže ke každému* $t_0 > \alpha$ *a každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ *tak, že pro všechny počáteční hodnoty* $\mathbf{x}_0 \in H$, $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ *a pro všechna* $t \geq t_0$ *platí, že řešení* $\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ *Cauchyovy úlohy 8.6 splňuje nerovnost*

$$\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon\,. \tag{8.8}$$



Obrázek 8.1: Triviální řešení je stabilní.

Příklad 8.1 *Ukažte, že triviální řešení rovnice*

$$x' = kx$$

je stabilní pro každé $k \leq 0$.

Řešení: *Funkce $f(t,x) = kx$ je spojitá a lipschitzovská vzhledem k proměnné x pro všechna $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Můžeme tedy volit $\alpha = -\infty, I = (-\infty, \infty), H = \mathbb{R}, G = I \times \mathbb{R}$. Cauchyova úloha*

$$x' = kx\,, \quad x(t_0) = x_0$$

má řešení $u(t,t_0,x_0) = x_0 \mathrm{e}^{k(t-t_0)}$, $t \in I$.

Tedy $\quad |u(t,t_0,x_0)| = |\,x_0| \cdot \mathrm{e}^{k(t-t_0)} \leq |\,x_0| \quad$ *pro všechna $k \leq 0,\ t \geq t_0$.*

Zvolíme-li $\delta = \varepsilon$, bude podle 8.8 platit

$$|u(t,t_0,x_0)| < \varepsilon \quad \textit{pro všechna } t \geq t_0, k \leq 0, |\,x_0| < \delta\,.$$

Tedy triviální řešení je stabilní.

Příklad 8.2 *Ukažte, že triviální řešení systému*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 \end{aligned} \tag{8.9}$$

je stabilní.

Řešení: *Cauchyova úloha pro systém 8.9 s počáteční podmínkou $x_1(t_0) = x_{01}, x_2(t_0) = x_{02}$ má pro každé $t_0 \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ řešení*

$$\mathbf{u}(t,t_0,x_0) = \begin{pmatrix} x_{01}\cos(t-t_0) + x_{02}\sin(t-t_0) \\ -x_{01}\sin(t-t_0) + x_{02}\cos(t-t_0) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Pro normu řešení dostáváme odhad

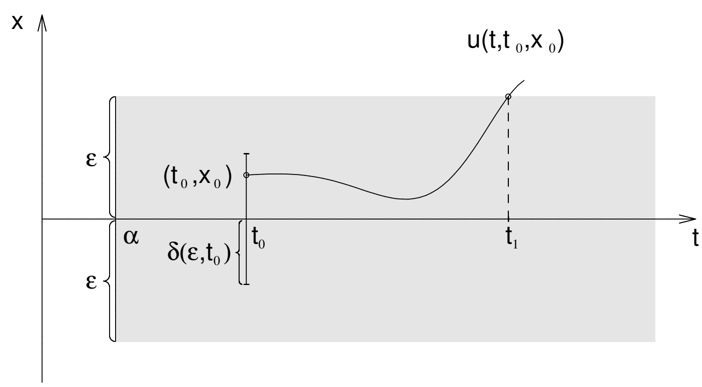
$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(t,t_0,\mathbf{x}_0)\| &= |\,x_{01}\cos(t-t_0)+x_{02}\sin(t-t_0)|+|\,-x_{01}\sin(t-t_0)+x_{02}\cos(t-t_0)|\leq\\ &\leq |\,x_{01}|+|\,x_{02}|+|\,x_{01}|+|\,x_{02}|=2\,(|\,x_{01}|+|\,x_{02}|)=2\|\mathbf{x}_0\|\,.\end{aligned}$$

Položíme-li $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, *dostaneme*

$$\|\mathbf{u}(t,t_0,\mathbf{x}_0)\|\leq 2\|\mathbf{x}_0\|<2\delta=\varepsilon\quad \textit{pro všechna } t\geq t_0\,.$$

Tedy triviální řešení je stabilní.

Triviální řešení, které není stabilní, nazveme **nestabilním**.
Volně můžeme říci, že triviální řešení systému 8.7 je nestabilní právě tehdy, existuje-li okamžik t_0 a číslo $\varepsilon>0$ tak, že v každém libovolně malém okolí počátku existuje bod $\mathbf{x}_0$ tak, že řešení $\mathbf{u}(t,t_0,\mathbf{x}_0)$ se vzdálí od triviálního řešení o více než ε, neboli existuje $t_1>t_0$ tak, že $\|\mathbf{u}(t,t_0,\mathbf{x}_0)\|>\varepsilon$ pro $t>t_1$ (viz obrázek 8.2).



Obrázek 8.2: Triviální řešení není stabilní.

Příklad 8.3 *Ukažte, že triviální řešení systému*

$$\begin{aligned}x_1'&=x_2\\ x_2'&=x_1\end{aligned}\tag{8.10}$$

je nestabilní.

Řešení: *Cauchyova úloha pro systém 8.10 s počáteční podmínkou* $x_1(t_0)=x_{01}, x_2(t_0)=x_{02}$ *má řešení*

$$\mathbf{u}(t,t_0,x_0)=\tfrac{1}{2}\left((x_{01}+x_{02})\mathrm{e}^{t-t_0}+(x_{01}-x_{02})\mathrm{e}^{-(t-t_0)}\,,\,(x_{01}+x_{02})\mathrm{e}^{t-t_0}-(x_{01}-x_{02})\mathrm{e}^{-(t-t_0)}\right)$$

Zvolme $\varepsilon=1$, $t_0=0$, *pak pro libovolné* $\delta>0$ *můžeme volit* $\mathbf{x}_0=\left(\frac{\delta}{2}\,,\,\frac{\delta}{2}\right)^T$, $t_1>-\ln\frac{\delta}{2}$ *a dostaneme odhad*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(t_1,t_0,\mathbf{x}_0)\| &= \|\mathbf{u}(t_1,0,\mathbf{x}_0)\|=\|\tfrac{1}{2}\left(\delta\mathrm{e}^{t_1},\delta\mathrm{e}^{t_1}\right)\|=\\ &= \tfrac{1}{2}\,\delta\mathrm{e}^{t_1}\cdot\|(1,1)\|=\tfrac{1}{2}\,\delta\mathrm{e}^{t_1}\,(|\,1|+|\,1|)=\delta\mathrm{e}^{t_1}>\delta\mathrm{e}^{-\ln\frac{\delta}{2}}=\delta\cdot\tfrac{2}{\delta}=2>\varepsilon\,.\end{aligned}$$

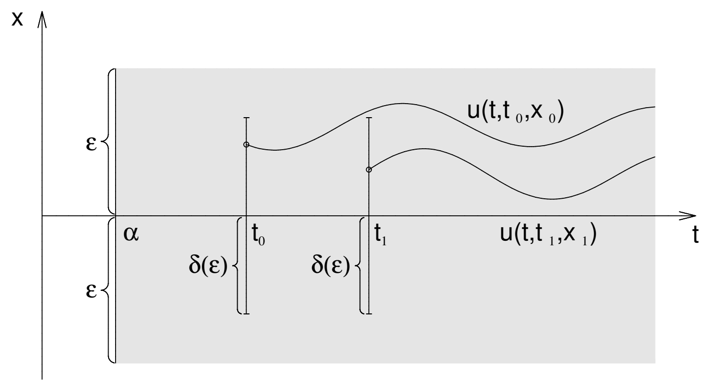
Triviální řešení systému 8.10 je nestabilní.

Definice 8.2 *Řekneme, že triviální řešení systému*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

*je **stejnoměrně stabilní** (viz obrázek 8.3), jestliže je stabilní a číslo δ v definici 8.1 nezávisí na volbě počátečního okamžiku t_0, tj. když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že pro každé $\mathbf{x}_0 \in H \subset \mathbb{R}^n$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$, vyhovující nerovnostem $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$, $t \geq t_0 > \alpha$ platí*

$$\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon\,.$$



Obrázek 8.3: Triviální řešení je stejnoměrně stabilní.

Všimneme-li si podrobněji příkladů 8.1, 8.2, 8.3, zjistíme, že triviální řešení ve všech případech jsou stejnoměrně stabilní, neboť δ závisí pouze na ε a nikoli na t_0. Tuto vlastnost mají všechny autonomní systémy, tj. systémy tvaru $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Platí, že když triviální řešení autonomního systému je stabilní, pak je stejnoměrně stabilní. Pro neautonomní systémy to neplatí.

Příklad 8.4 *Uvažujme Cauchyovu úlohu*

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 \\ x_2' &= (\sin\ln t + \cos\ln t - 1)x_2 \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $x_1(t_0) = x_{01}, x_2(t_0) = x_{02}$.
Pak pro každé $(t_0, \mathbf{x}_0) \in I \times \mathbb{R}^2, I = (1, \infty)$, má úloha řešení

$$\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \left(x_{01}\,\mathrm{e}^{-t+t_0}\,,\; x_{02}\,\mathrm{e}^{-t(1-\sin\ln t)+t_0(1-\sin\ln t_0)}\right), \quad t > 1\,.$$

Pro normu tohoto řešení dostáváme odhad

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| &= |\,x_{01}\,\mathrm{e}^{-(t-t_0)}| + |\,x_{02}\,\mathrm{e}^{-t(1-\sin\ln t)+t_0(1-\sin\ln t_0)}| \leq \\ &\leq |\,x_{01}| + |\,x_{02}|\,\mathrm{e}^{2t_0} \leq (|\,x_{01}| + |\,x_{02}|)\,\mathrm{e}^{2t_0} = \|\mathbf{x}_0\|\mathrm{e}^{2t_0} \quad \textit{pro všechna } t \geq t_0\,. \end{aligned}$$

Vidíme, že v odhadu se vyskytuje jak počáteční hodnota $\mathbf{x}_0$*, tak i počáteční okamžik* t_0*. Zvolíme-li např.* $\delta = \varepsilon\, \mathrm{e}^{-2t_0}$*, dostaneme*

$$\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq \|\mathbf{x}_0\| \mathrm{e}^{2t_0} < \delta \mathrm{e}^{2t_0} = \varepsilon \mathrm{e}^{-2t_0} \cdot \mathrm{e}^{2t_0} = \varepsilon\,.$$

Je tedy triviální řešení stabilní, nikoli však stejnoměrně stabilní.

Definice 8.3 *Řekneme, že triviální řešení systému*

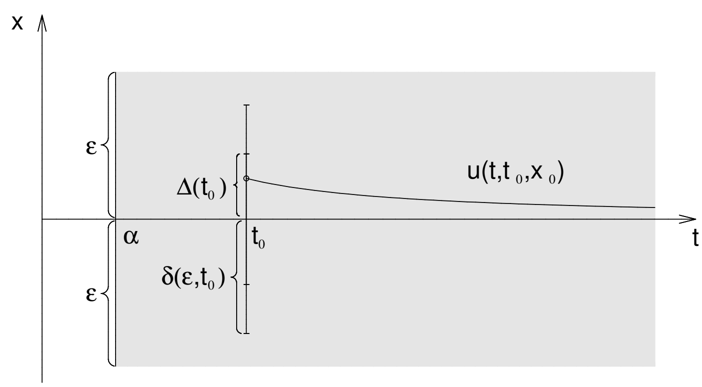
$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

*je **asymptoticky stabilní** (viz obrázek 8.4), jestliže*

i) je stabilní

ii) existuje číslo $\Delta > 0$ *tak, že pro každé* $\mathbf{x}_0 \in H \subset \mathbb{R}^n$*,* $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta$ *a každé* $t_0 > \alpha$ *platí*

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| = 0\,.$$



Obrázek 8.4: Triviální řešení je asymptoticky stabilní.

Analogickým způsobem definujeme **stejnoměrnou asymptotickou stabilitu** triviálního řešení systému $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$.

Podmínka ii) v definici 8.3 znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$, $t_0 > \alpha$, $\mathbf{x}_0 \in H \subset \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta$, existuje číslo $T = T(\varepsilon, t_0, \mathbf{x}_0)$ tak, že pro všechna $t > t_0 + T$ je $\|\mathbf{u}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$.

Příklad 8.5 *Ukažte, že triviální řešení systému*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 \end{aligned}$$

není asymptoticky stabilní.

Řešení: *V příkladu 8.2 jsme ukázali, že triviální řešení je stabilní (dokonce je stejnoměrně stabilní). Musíme tedy ukázat, že není splněna podmínka ii) v definici 8.3. Řešením Cauchyovy úlohy*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \qquad & x_1(t_0) &= x_{01} \\ x_2' &= -x_1 \qquad & x_2(t_0) &= x_{02} \end{aligned}$$

je vektorová funkce

$$\mathbf{u}(t, t_0, x_0) = (x_{01}\cos(t-t_0) + x_{02}\sin(t-t_0)\,,\ -x_{01}\sin(t-t_0) + x_{02}\cos(t-t_0))\ , \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Pro normu tohoto řešení (použijeme euklidovskou normu) dostáváme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t,t_0,\mathbf{x}_0)\| &= \big((u_1(t,t_0,\mathbf{x}_0))^2 + (u_2(t,t_0,\mathbf{x}_0))^2\big)^{1/2} = \\ &= \big(x_{01}^2\cos^2(t-t_0) + 2x_{01}x_{02}\cos(t-t_0)\sin(t-t_0) + x_{02}^2\sin^2(t-t_0) + \\ &\quad + x_{01}^2\sin^2(t-t_0) - 2x_{01}x_{02}\sin(t-t_0)\cos(t-t_0) + x_{02}^2\cos^2(t-t_0)\big)^{1/2} = \\ &= (x_{01}^2 + x_{02}^2)^{1/2} = \|\mathbf{x}_0\|\,, \end{aligned}$$

takže pro $\|\mathbf{x}_0\| \neq 0$ *platí*

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{u}(t,t_0,\mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{x}_0\| \neq 0\,.$$

Tedy triviální řešení není asymptoticky stabilní.

Dá se dokázat, že při ověřování podmínek stability triviálního řešení stačí podmínky ověřit pro jedno libovolné $t_0 > \alpha$ a pak už musí platit pro všechna $t > \alpha$.

Cvičení

Vyšetřete z hlediska stability triviální řešení systémů:

Příklad 1
$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -2x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$
[*Stejnoměrně asymptoticky stabilní*]

Příklad 2
$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$
[*Nestabilní*]

Příklad 3
$$\begin{aligned} x_1' &= -3x_2 \\ x_2' &= 3x_1 \end{aligned}$$
[*Stejnoměrně stabilní*]

8.0.1 Stabilita lineárních systémů

Uvažujme nyní nehomogenní lineární systém diferenciálních rovnic

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)\,, \tag{8.11}$$

kde $\mathbf{A}(t), \mathbf{b}(t)$ jsou spojité na intervalu $I = (\alpha, \infty) \subset \mathbb{R}$.
Pak libovolné řešení $\mathbf{u}(t)$ systému (8.11) je stabilní, resp. asymptoticky stabilní, resp. nestabilní, právě když triviální řešení homogenního systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

je stabilní, resp. asymptoticky stabilní, resp. nestabilní.

V lineárních systémech nastane tedy právě jeden z těchto případů:

I) Všechna řešení jsou stabilní.

II) Všechna řešení jsou asymptoticky stabilní.

III) Všechna řešení jsou nestabilní.

Proto v případě I) říkáme, že lineární systém je stabilní, v případě II) říkáme, že lineární systém je asymptoticky stabilní, a v případě III) říkáme, že lineární systém je nestabilní.
Při vyšetřování stability nehomogenního systému (8.11) se tedy stačí omezit na vyšetřování stability triviálního řešení systému

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{8.12}$$

Věta 8.1 *Triviální řešení systému (8.12) je stabilní právě tehdy, když existuje $K > 0$ tak, že*

$$\|\mathbf{U}(t)\| \le K\,, \quad t \in I\,,$$

kde $\mathbf{U}(t)$ je fundamentální matice řešení systému (8.12).
(Tedy každé řešení systému je ohraničené.)

Odtud plyne, že je-li nehomogenní systém (8.11) stabilní, pak jsou buď všechna řešení ohraničená, nebo neohraničná pro $t \to \infty$.

Poznamenejme ještě, že u nelineárních systémů z ohraničenosti všech jeho řešení neplyne obecně jejich stabilita.

Věta 8.2 *Triviální řešení systému (8.12) je asymptoticky stabilní právě tehdy, když*

$$\|\mathbf{U}(t)\| \to 0 \quad \textit{pro } t \to \infty\,,$$

kde $\mathbf{U}(t)$ je fundamentální matice řešení systému (8.12).
(Tedy všechna řešení systému (8.12) konvergují pro $t \to \infty$ k nule.)

Uvažujme nyní homogenní systém lineárních diferenciálních rovnic

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}\,, \tag{8.13}$$

kde $\mathbf{A}$ je konstatní reálná čtvercová matice typu (n, n).
V tomto případě je systém (8.13) speciálním případem autonomního systému $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.
Tedy stabilita triviálního řešení systému (8.13) je ekvivalentní s jeho stejnoměrnou stabilitou a podobně asymptotická stabilita triviálního řešení systému (8.13) je ekvivalentní se stejnoměrnou asymptotickou stabilitou.

Věta 8.3 *Nechť je dán systém (8.13). Jestliže všechna charakteristická čísla matice* $\mathbf{A}$ *mají záporné reálné části, pak triviální řešení daného systému je stejnoměrně asymptoticky stabilní. Existuje-li charakteristické číslo matice* $\mathbf{A}$ *s kladnou reálnou částí, pak triviální řešení je nestabilní.*

Poznámka. O stabilitě lineárního systému (8.13) nelze rozhodnout pomocí věty 8.3 v případě, že žádné charakteristické číslo matice $\mathbf{A}$ nemá kladnou reálnou část, ale mezi charakteristickými čísly se vyskytují čísla s nulovou reálnou částí.
V tomto případě může být lineární systém stabilní nebo nestabilní. Podmínky stability, resp. nestability, uvedené ve větě 8.3 jsou tedy postačující, nikoli nutné.
Podmínky asymptotické stability jsou nutné a postačující.
Lze dokázat, že v případě, že všechna charakteristická čísla matice $\mathbf{A}$ mají záporné nebo nulové reálné části, přičemž všechna charakteristická čísla s nulovou reálnou částí mají násobnost jedna, je uvažovaný lineární systém stabilní (nikoli však asymptoticky stabilní).

8.0.2 Hurwitzovo kritérium

Jelikož charakteristická čísla systému (8.13) jsou kořeny charakteristického polynomu

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n\,,$$

budou nás zajímat polynomy, jejichž všechny nulové body mají záporné reálné části. Takové polynomy se nazývají **hurwitzovské polynomy** a příslušné kritérium **Hurwitzovo kritérium**:

Nechť je dán polynom

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n\,, \quad n \geq 1,\ a_0 > 0,\ a_n \neq 0 \tag{8.14}$$

s reálnými koeficienty. **Hurwitzovou maticí** polynomu (8.14) nazýváme matici

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \tag{8.15}$$

kde klademe $a_s = 0$ pro $s < 0$ a $s > n$. Platí toto tvrzení:

Všechny nulové body polynomu (8.14) mají záporné reálné části právě tehdy, když determinanty $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ jsou kladné, přičemž

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & a_{2k-4} & \cdots & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 1, \dots, n\,.$$

Mají-li všechny nulové body polynomu (8.14) záporné reálné části, musí být všechny jeho koeficienty a_j, $j = 0, \dots, n$, kladné.
Dá se ukázat, že pro $n = 2$ je tato podmínka i postačující, tj. že polynom $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ je hurwitzovský právě tehdy, když $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.
Pro polynomy vyšších stupňů je tato podmínka pouze nutná. Tak například polynom

$$f(z) = 30 + 4z + z^2 + z^3$$

má nulové body $-3, 1+3j, 1-3j$, tedy dva kořeny mají kladné reálné části, i když všechny koeficienty daného polynomu jsou kladné.

Příklad 8.6 *Zjistěte, zda polynom*

$$f(z) = 3 + 2z + 7z^2 + 3z^3 + z^4$$

je hurwitzovský.
Všechny koeficienty polynomu f jsou kladné, takže tento polynom může být hurwitzovský. Použijeme Hurwitzovo kritérium:
$a_0 = 3,\ a_1 = 2,\ a_2 = 7,\ a_3 = 3,\ a_4 = 1,$ *tedy*

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 = 2 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 > 0 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 > 0 \\ \Delta_4 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \Delta_3 = 11 > 0\,. \end{aligned}$$

Podmínky Hurwitzova kritéria jsou splněny, takže polynom je hurwitzovský.

Příklad 8.7 *Vyšetřete stabilitu systému*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= 0 \end{aligned}$$

Řešení:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)^2\,.$$

Tedy charakteristická čísla matice $\mathbf{A}$ *jsou* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.
Matice $\mathbf{A}$ *má charakteristické číslo s kladnou reálnou částí, tedy systém je nestabilní.*

Příklad 8.8 *Vyšetřete stabilitu řešení* $\mathbf{u}(t) = (\sin t, t + \cos t, 1 + \sin t)^T$ *systému*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-t \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix}$$

Řešení: *Stačí vyšetřit stabilitu triviálního řešení homogennoho systému*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^2+1)(\lambda-1) = 0$$

Tedy $\lambda_1 = j$, $\lambda_2 = -j$, $\lambda_3 = 1$. *Protože existuje charakteristické číslo matice* $\mathbf{A}$ *s kladnou reálnou částí, je triviální řešení homogenního systému nestabilní a tudíž i řešení* $\mathbf{u}(t)$ *daného nehomogenního systému je nestabilní.*

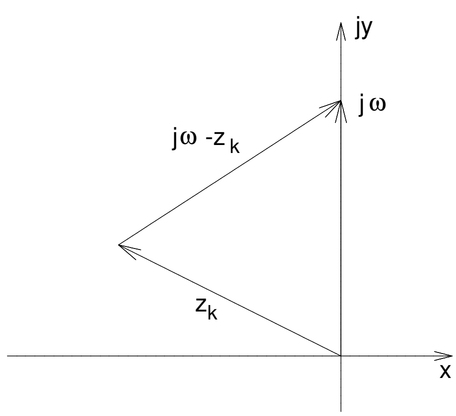
8.0.3 Michajlovovo kritérium

Uvažujme polynom

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n\,, \tag{8.16}$$

který nemá kořeny ležící na imaginární ose. Rozložme polynom $P(z)$ na součin kořenových činitelů, tj.

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)\,.$$



Nechť bod $z = j\omega$, $\omega \in (-\infty, \infty)$, se pohybuje zdola nahoru po imaginární ose. Z obrázku je zřejmé, že když $\operatorname{Re} z_k < 0$, tak při změně ω od $-\infty$ do $+\infty$ se vektor $z - z_k = j\omega - z_k$ otočí o úhel π proti směru hodinových ručiček a funkce $\arg(z - z_k)$ má přírůstek $+\pi$. Jestliže tedy všechny kořeny polynomu $P(z)$ mají záporné reálné části, argument polynomu $P(z)$ bude mít přírůstek $n\pi$, protože přírůstek argumentu součinu se rovná součtu přírůstků argumentů jednotlivých činitelů.

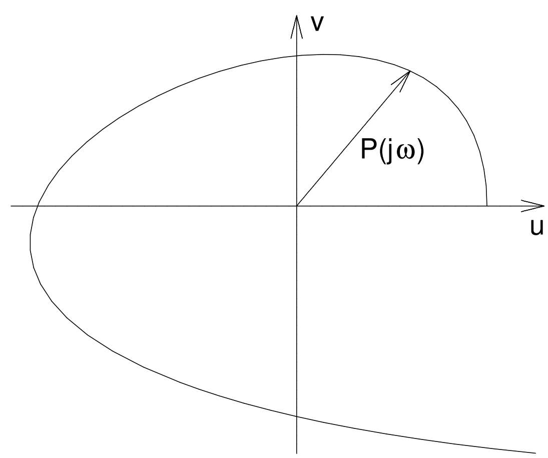
Kdyby alespoň jeden z kořenů z_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$ měl kladnou reálnou část, přírůstek argumentu činitele $z - z_j$ by měl hodnotu $-\pi$ (odpovídající vektor se otáčí ve směru pohybu hodinových ručiček) a přírůstek argumentu polynomu $P(z)$ by byl menší než $n\pi$.

Dosaďme nyní do (8.16) $z = j\omega$. Pak platí

$$P(j\omega) = u(\omega) + j\,v(\omega)\,,$$

kde
$$\begin{aligned} u(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \cdots \\ v(\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \cdots \end{aligned}$$

$P(j\omega)$ pak reprezentuje vektor v komplexní rovině (u, v). Při změně parametru ω od $-\infty$ do $+\infty$ vytváří koncový bod daného vektoru křivku, kterou nazýváme **hodografem** vektorové funkce $w = P(j\omega)$ (nebo též Michajlovovou křivkou), viz obrázek 8.5.



Obrázek 8.5: Michajlovova křivka

Tedy pro $\omega \in (-\infty, \infty)$ se vektor $P(j\omega)$ otočí o úhel φ. Jestliže polynom $P(z)$ má m kořenů s kladnou reálnou částí a $n - m$ kořenů se zápornou reálnou částí, pak

$$\varphi = (n - m)\pi + m(-\pi) = (n - 2m)\pi\,.$$

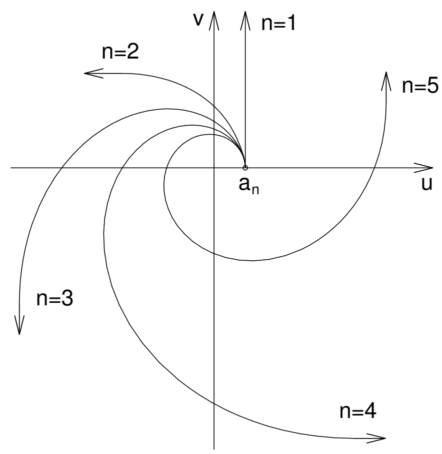
Jelikož funkce $u(\omega)$ je sudá, Michajlovova křivka je symetrická podle osy u, což znamená, že můžeme konstruovat Michajlovovu křivku pouze pro $\omega \in \langle 0, \infty)$, přičemž

$$\varphi = (n - m)\,\tfrac{\pi}{2} + m \cdot (-\tfrac{\pi}{2}) = (n - 2m)\,\tfrac{\pi}{2}\,. \tag{8.17}$$

Již víme, že řešení systému (8.11) je asymptoticky stabilní, jestliže všechny kořeny příslušné charakteristické rovnice mají záporné reálné části, tj., m se musí v (8.17) rovnat nule, což vede k následujícímu kritériu stability.

Michajlovovo kritérium. Polynom (8.16) je Hurwitzův, jestliže Michajlovova křivka pro $\omega \in \langle 0, \infty)$ neprochází počátkem a platí $\varphi = n \cdot \frac{\pi}{2}$.

Na obrázku 8.6 jsou zobrazeny typické Michajlovovy křivky pro polynomy stupňů $n = 1, 2, 3, 4, 5$ v případě, že všechny kořeny mají zápornou reálnou část.



Obrázek 8.6: Michajlovovy křivky pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Příklad 8.9 *Michajlovovým kritériem rozhodněte o stabilitě systému*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 \,. \end{aligned}$$

Řešení: *Charakteristická rovnice je tvaru*

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0\,.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} P(j\omega) &= \omega^4 - 2j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + 1\,, \\ u(\omega) &= \omega^4 - 3\omega^2 + 1 \\ v(\omega) &= -2\omega^3 + 2\omega = 2\omega(1-\omega^2) = 2\omega(1-\omega)(1+\omega)\,. \end{aligned}$$

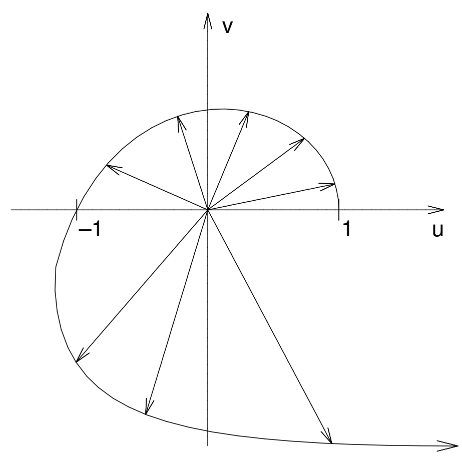
Hledejme nyní kořeny rovnic $u(\omega) = 0,\ v(\omega) = 0,\ \omega \in \langle 0, \infty)$.

$$\begin{aligned} u(\omega) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \omega^4 - 3\omega^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}}\,, \omega_2 = \sqrt{\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}} \\ v(\omega) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\omega(1-\omega)(1+\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = 0\,, \omega_4 = 1\,. \end{aligned}$$

Sestavme tabulku hodnot $u = u(\omega)$, $v = v(\omega)$ pro vypočtené hodnoty parametru ω, a to vzestupně vzhledem k ω:

ω	0	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	∞
u	1	0	-1	0	$+$
v	0	$+$	0	$-$	$-$

K průběhu Michajlovovy křivky nám stačí určit pouze znaménka funkčních hodnot včetně případu, kdy $\omega \to \infty$. Jelikož $\lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{v}{u} = 0$, průběh Michajlovovy křivky lze znázornit následovně:



Obrázek 8.7: Michajlovova křivka k příkladu 8.9

Tedy pro $\omega \in \langle 0, \infty)$ se vektor $P(j\omega)$ otočí o úhel $\varphi = 2\pi$. Aby polynom $P(\lambda)$ byl dle Michajlovova kritéria hurwitzovský, musí v našem případě platit $\varphi = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$, což je splněno. Odtud plyne, že vyšetřovaný systém je asymptoticky stabilní.

Z výše uvedeného vyplývá, že jsou-li všechny reálné části kořenů polynomu (8.16) záporné, platí:

1) Při pohybu ω od 0 do ∞ se bude vektor $w = P(j\omega)$ otáčet pouze proti směru pohybu hodinových ručiček a Michajlovova křivka bude střídavě protínat jak reálnou, tak imaginární osu roviny (u, v).

2) Celkový počet těchto průsečíků (včetně průsečíku pro $\omega = 0$) se bude rovnat stupni polynomu $P(z)$.

3) Michajlovova křivka nemůže procházet počátkem souřadnic, protože pro určitou hodnotu ω by muselo platit $P(j\omega) = 0$, což by byl spor s podmínkou, že polynom $P(z)$ nemá kořeny ležící na imaginární ose.

Tento rozbor nám umožňuje zformulovat Michajlovovo kritérium v následujícím, snadno ověřitelném tvaru:

Jestliže polynom $P(z)$ nemá kořeny na imaginární ose, pak nutnou a postačující podmínkou pro existenci kořenů $P(z)$ pouze se zápornou reálnou částí je, aby:

1) Při rostoucím $\omega \in \langle 0, \infty)$ se vektor $P(j\omega)$ pohyboval proti směru pohybu hodinových ručiček.

2) Všechny kořeny rovnic $u(\omega) = 0, v(\omega) = 0$ byly reálné a navzájem se střídaly. (Tj. mezi dvěma následujícími kořeny jedné rovnice musí ležet jeden kořen druhé rovnice.)

Jestliže všechny koeficienty polynomu $P(z)$ jsou kladné, stačí ověřit pouze podmínku 2).

Na závěr zdůrazněme, že výše uvedená kritéria stability pro systémy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu platí vzhledem k „ekvivalenci“ systémů lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu a lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu i pro vyšetřování stability lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu.

Příklad 8.10 *Pomocí Michajlovova kritéria zjistěte, zda je stabilní diferenciální rovnice*

$$x^{(4)} + x''' + 10x'' + 4x' + 9x = 0$$

Řešení: *Charakteristická rovnice je tvaru*

$$P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 10\lambda^2 + 4\lambda + 9 = 0$$

Tedy $\quad P(j\omega) = \omega^4 - 10\omega^2 + 9 - j(\omega^3 - 4\omega).$

$$\begin{array}{lrcll} \textit{Odtud} & u(\omega) & = & \omega^4 - 10\omega^2 + 9 = 0 & \Rightarrow\ \omega_{1,2} = \pm 1,\ \omega_{3,4} = \pm 3 \\ & v(\omega) & = & -\omega^3 + 4\omega = 0 & \Rightarrow\ \omega_1 = 0,\ \omega_{2,3} = \pm 2 \end{array}$$

Stačí nám uvažovat pouze kořeny z intervalu $\langle 0, \infty)$. *Vidíme, že všechny jsou reálné a navzájem se střídají, z čehož plyne, že polynom* $P(\lambda)$ *je hurwitzovský, a tedy vyšetřovaná rovnice je asymptoticky stabilní.*

Cvičení

Vyšetřete z hlediska stability triviální řešení následujících systémů:

Příklad 1 $\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -2x_1 - 3x_2 \end{aligned}$ [*Asymptoticky stabilní*]

Příklad 2 $\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$ [*Nestabilní*]

Pomocí Hurwitzova kritéria rozhodněte o asymptotické stabilitě následujících lineárních diferenciálních rovnic a systémů lineárních diferenciálních rovnic.

Příklad 3 $\begin{aligned} x_1' &= 3x_2 \\ x_2' &= -3x_1 - 5x_2 \end{aligned}$ [*Asymptoticky stabilní*]

Příklad 4
$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_3 \\ x_3' &= x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$
[*Asymptoticky stabilní*]

Příklad 5
$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x_1 - x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$
[*Asymptoticky nestabilní*]

Příklad 6 $x^{(4)} + 4x''' + 6x'' + 8x' + x = 0$ [*Asymptoticky stabilní*]

Příklad 7 $x^{(4)} + 5x'' + 9x = 0$ [*Asymptoticky nestabilní*]

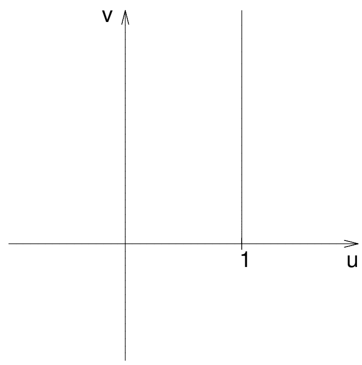
Michajlovovým kritériem vyšetřete stabilitu následujících systémů lineárních diferenciálních rovnic a lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů.

Příklad 8
$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x_1 \end{aligned}$$
[*Nestabilní, viz obrázek 8.8*]

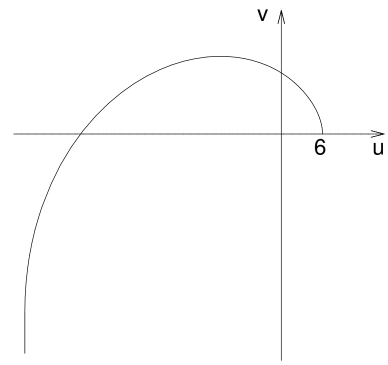
Příklad 9 $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$ [*Asymptoticky stabilní, viz obrázek 8.9*]

Příklad 10
$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= -\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{3}{2}x_3 - 2x_4 \end{aligned}$$
[*Asymptoticky stabilní, viz obrázek 8.10*]

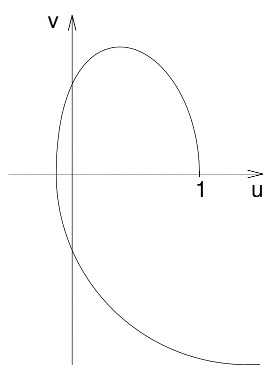
Příklad 11 $y^{(5)} + y^{(4)} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0$
[*Asymptoticky stabilní, viz obrázek 8.11*]



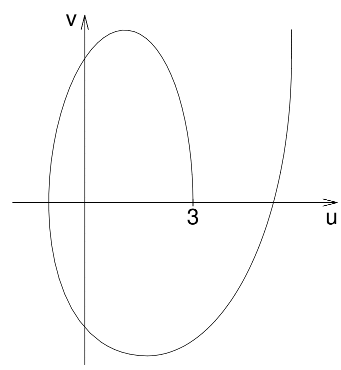
Obrázek 8.8: Michajlovova křivka z příkladu 8



Obrázek 8.9: Michajlovova křivka z příkladu 9



Obrázek 8.10: Michajlovova křivka z příkladu 10



Obrázek 8.11: Michajlovova křivka z příkladu 11

9 Rovinný autonomní diferenciální systém

9.1 Cíl kapitoly

Celá řada technických jevů je matematicky modelována diferenciálními systémy, ve kterých nezávislá proměnná (hrající většinou roli času) není zastoupena explicitně. Těmto systémům říkáme autonomní systémy. Cílem této kapitoly je podrobně se seznámit s vlastnostmi řešení autonomního rovinného (tj. dvourozměrného) homogenního lineárního systému. Tyto systémy mají jednu velkou výhodu - jejich řešení je možné zobrazovat v tzv. fázové rovině. Provedeme podrobnou klasifikaci všech možných případů chování řešení. Z fázových obrazů je možné snadno usuzovat na stabilitu či nestabilitu řešení, tedy na vlastnosti, které nás často prakticky zajímají (zopakujte si dle vašich poznámek z bakalářského studia pojem stability a nestability řešení).

9.2 Autonomní diferenciální systém

Systém diferenciálních rovnic se nazývá **autonomním** systémem (nebo také dynamickým systémem), pokud je zapsán v normálním tvaru a pravé strany tohoto systému nejsou závislé na (nezávislé) proměnné t. Jinými slovy, systém diferenciálních rovnic je autonomní, pokud ho lze zapsat ve tvaru

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ y_n' = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n), \end{array}\right. \tag{9.1}$$

tj.,

$$y' = f(y),$$

kde vektorová funkce f je definována na nějaké oblasti Ω v prostoru $\mathbb{R}^n$ nebo na celém prostoru $\mathbb{R}^n$ (tj., $\Omega = \mathbb{R}^n$). Oblast Ω se nazývá **fázový prostor**, proměnná t, která je v systému (9.1) implicitně obsažena se často nazývá **čas.** Budeme předpokládat, že pravé strany systému (9.1) jsou spojité a že parciální derivace $\partial f_i/\partial y_k$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ existují a jsou též spojité. Partikulární řešení $y = y(t)$ systému (9.1) můžeme chápat buď jako graf funkce $y = y(t)$ v prostoru $\mathbb{R} \times \Omega$ nebo jako křivku v prostoru Ω danou parametricky rovnicí $y = y(t)$. V tomto případě takovou křivku nazýváme **trajektorií** (nebo **fázovým obrazem řešení**) systému (9.1). Trajektorie je kolmým průmětem grafu funkce $y = y(t)$ z prostoru $\mathbb{R} \times \Omega$ do prostoru Ω.

9.3 Autonomní rovinný homogenní lineární systém

9.3.1 Lineární systém s konstantními koeficienty v rovině

Budeme diskutovat kvalitativní chování řešení systému rovnic

$$x' = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{9.2}$$

s reálnou konstantní maticí

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

na okolí rovnovážného bodu $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Připomeňme terminologii zavedenou v 9.2. Rovina x_1x_2 je nazývána **fázovou rovinou.** Grafické znázornění ukazující kolmou projekci řešení do fázové roviny nazýváme **fázovým obrazem řešení** systému rovnic. Fázový obraz množiny všech řešení systému (9.2) nazýváme **fázovým obrazem systému.** Systém (9.2) může být zapsán (položíme-li $x_1 = x$, $x_2 = y$) ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_{11}x + a_{12}y, \tag{9.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a_{21}x + a_{22}y \tag{9.4}$$

a jeho fázový obraz bude diskutován v okolí rovnovážného bodu $(x, y) = (0, 0)$. Zapišme odpovídající charakteristickou rovnici

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

tj. rovnici

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \tag{9.5}$$

Její kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \right),$$

a po zřejmé úpravě,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}} \right) .$$

9.3.2 Vztah rovinného systému (9.2) a rovnice druhého řádu

Autonomní rovinný systém můžeme řešit několika způsoby. Užijme nejprve eliminační metodu k tomu, abychom si ujasnili některé společné rysy a také rozdíly při řešení systému (9.2) a rovnice druhého řádu, která vznikne eliminací jedné nebo druhé hledané proměnné.

Derivováním první rovnice systému (9.3) dostáváme

$$x'' = a_{11}x' + a_{12}y' = a_{11}x' + a_{12}(a_{21}x + a_{22}y).$$

Eliminujeme nyní proměnnou y z první rovnice systému (9.3) za podmínky, že $a_{12} \neq 0$:

$$y = \frac{1}{a_{12}} \cdot (x' - a_{11}x).$$

Pak
$$x'' = a_{11}x' + a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}\left(\frac{1}{a_{12}} \cdot (x' - a_{11}x)\right)$$
a nakonec obdržíme rovnici druhého řádu vzhledem k proměnné x:
$$x'' - (a_{11} + a_{22})x' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = 0. \tag{9.6}$$
Všimněme si, že příslušná charakteristická rovnice, odpovídající rovnici (9.6) je stejná jako rovnice (9.5). Rovnice (9.6) může být snadno vyřešena a výsledek můžeme dosadit do druhé rovnice systému (9.3). To znamená, že můžeme najít druhou proměnnou y. Je-li $a_{12} = 0$, pak lze první rovnici systému (9.3) řešit přímo. V obou případech tedy můžeme najít obecné řešení systému (9.3) díky pomocné lineární rovnici druhého nebo prvého řádu s konstantními koeficienty.

Poznámka 9.1 *Stejný eliminační postup může být použit vzhledem k proměnné y. Je-li $a_{21} \neq 0$, pak y vyhovuje stejné rovnici jako x, totiž rovnici*
$$y'' - (a_{11} + a_{22})y' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = 0. \tag{9.7}$$
Nemůžeme ovšem na základě faktu, že jak x, tak y vyhovují stejné rovnici konstatovat, že obě řešení mají identický tvar. To je obecně vyloučeno existencí vztahů mezi oběma proměnnými, určenými právě zkoumaným systémem (9.2). Nicméně fakt, že známe strukturu obecného řešení diskutovaných rovnic druhého řádu je dobrou motivací pro pochopení přípustných tvarů obecného řešení systému (9.3).

9.3.3 Přípustné tvary obecného řešení rovinného systému

Vypišme přípustné tvary obecného řešení systému (9.3). Budeme předpokládat, že řešení jsou reálná. Tomu přizpůsobíme odpovídající klasifikaci:

9.3.4 Případ reálných a různých kořenů ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

Je-li $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pak z Věty 6.1 (str. 89) vyplývá, že systém (9.3) má obecné řešení tvaru
$$x = C_1 v_{11}^1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 v_{12}^1 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \tag{9.8}$$
$$y = C_1 v_{11}^2 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 v_{12}^2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \tag{9.9}$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty a v_{11}^1, v_{11}^2, v_{12}^1, v_{12}^2 jsou konstanty (tvořící dva vlastní vektory $v_{11} = (v_{11}^1, v_{11}^2)$ a $v_{12} = (v_{12}^1, v_{12}^2)$), které mohou být určeny dosazením výrazů (9.8) do systému (9.3). Tyto konstanty vyhovují systémům
$$(a_{11} - \lambda_1)v_{11}^1 + a_{12}v_{11}^2 = 0, \tag{9.10}$$
$$a_{21}v_{11}^2 + (a_{22} - \lambda_1)v_{11}^2 = 0 \tag{9.11}$$

a

$$(a_{11} - \lambda_2)v_{12}^1 + a_{12}v_{12}^2 = 0, \tag{9.12}$$
$$a_{21}v_{12}^1 + (a_{22} - \lambda_2)v_{12}^2 = 0. \tag{9.13}$$

9.3.5 Případ reálných a stejných kořenů ($\lambda_1 = \lambda_2$)

Je-li $\lambda_1 = \lambda_2$ a je-li hodnost h_1 matice $A - \lambda_1 E$ rovna jedné, pak má obecné řešení systému (9.3) v souladu s Větou 6.1 (str. 89) tvar

$$x = (C_1 v_{11}^1 + C_2 v_{21}^1 + C_2 v_{11}^1 t)\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \tag{9.14}$$

$$y = (C_1 v_{11}^2 + C_2 v_{21}^2 + C_2 v_{11}^2 t)\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \tag{9.15}$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty a v_{11}^1, v_{11}^2, v_{21}^1, v_{21}^2 jsou konstanty tvořící dva zobecněné vlastní vektory $v_{11} = (v_{11}^1, v_{11}^2)$ a $v_{21} = (v_{21}^1, v_{21}^2))$, které mohou být určeny postupem uvedeným v části 6.2.1 Je-li $h_1 = 0$, potom má obecné řešení tvar

$$x = (C_1 v_{11}^1 + C_2 v_{12}^1)\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \tag{9.16}$$

$$y = (C_1 v_{11}^2 + C_2 v_{12}^2)\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \tag{9.17}$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty a v_{11}^1, v_{11}^2, v_{12}^1, v_{12}^2 jsou konstanty tvořící dva zobecněné vlastní vektory $v_{11} = (v_{11}^1, v_{11}^2)$ a $v_{12} = (v_{12}^1, v_{12}^2))$, které mohou být určeny jako lineárně nezávislá řešení soustav (9.10), (9.12).

9.3.6 Případ komplexních kořenů ($\lambda_{1,2} = p \pm q \cdot i$)

Jsou-li kořeny charakteristické rovnice komplexní, tj., $\lambda_{1,2} = p \pm qi$, pak má obecné řešení tvar (který můžeme za tohoto předpokladu odvodit z tvaru (9.8) nebo z tvaru, uvedeného ve Větě 5.2, vzorec (5.15)):

$$x = \mathrm{e}^{pt}(\alpha_1 \cos qt + \beta_1 \sin qt), \tag{9.18}$$

$$y = \mathrm{e}^{pt}(\alpha_2 \cos qt + \beta_2 \sin qt), \tag{9.19}$$

kde konstanty α_1, β_1, α_2 a β_2 závisí na dvou **libovolných** konstantách.
V dalších částech budeme uvedené případy studovat podrobněji.

9.4 Fázové obrazy v případě reálných a různých kořenů charakteristické rovnice

9.4.1 Případ záporných a různých kořenů charakteristické rovnice

Uvažujme případ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Řešení $(x, y) \equiv (0, 0)$ je globálně asymptoticky stabilní, neboť (jak lze snadno vidět z (9.8))

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$$

pro libovolné konstanty C_1, C_2. V případě, když $C_1 = 0$ a $C_2 \neq 0$ je fázovým portrétem (po eliminaci proměnné t z (9.8)) přímka

$$v_{12}^2 x - v_{12}^1 y = 0. \tag{9.20}$$

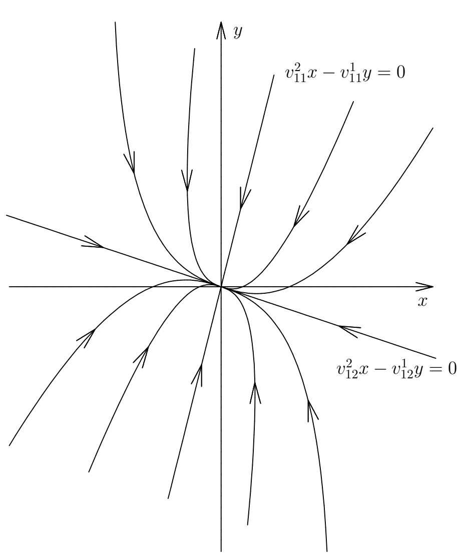
Šipkami je ukázán směr odpovídající růstu proměnné t. V případě $C_1 \neq 0$ a $C_2 = 0$ je fázovým portrétem (po eliminaci proměnné t z (9.8)) přímka

$$v_{11}^2 x - v_{11}^1 y = 0. \tag{9.21}$$

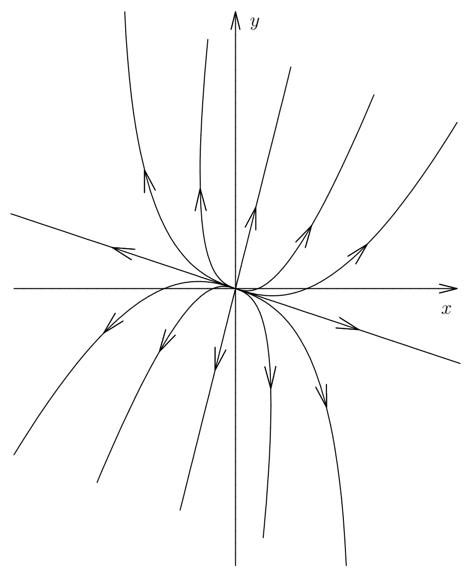
Kromě toho pro $C_2 \neq 0$ a $\alpha_{12} \neq 0$ ze vztahu (9.8) vyplývá

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y}{x} = \frac{v_{12}^2}{v_{12}^1}\,.$$

To značí, že každý fázový portrét (kromě přímky odpovídající $C_2 = 0$) má stejnou tečnu v počátku souřadnic, tj., přímku (9.20). Je-li $v_{12}^1 = 0$, pak je tato tečna přímkou $x = 0$ a v případě, že $v_{12}^2 = 0$ přímkou $y = 0$. Bod $(0, 0)$ nazýváme **stabilním nevlastním uzlem.** (Viz obr. 9.1.)



Obrázek 9.1: Stabilní uzel



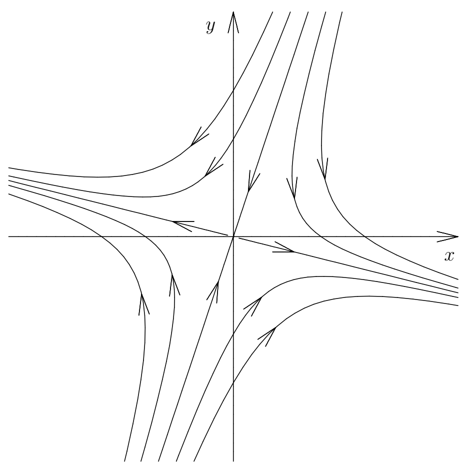
Obrázek 9.2: Nestabilní uzel

9.4.2 Případ kladných a různých kořenů charakteristické rovnice

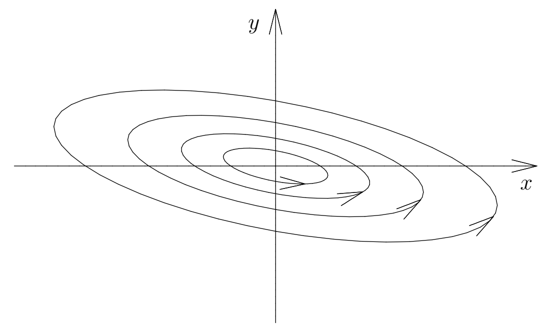
Předpokládejme, že $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Fázový portrét trajektorií je stejný jako v předchozím případě, pouze orientace šipek je opačná. Triviální řešení $x = y = 0$ je nestabilní. Bod $(0, 0)$ je nazýván **nestabilním vlastním uzlem.** (Viz obr. 9.2.)

9.4.3 Případ jednoho kladného a jednoho záporného kořene charakteristické rovnice

Předpokládejme, že $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 < 0$. V tomto případě vidíme ze vztahu (9.8), že vzdálenost mezi počátkem souřadnic a libovolným bodem fázového portrétu řešení pro $C_1 \neq 0$ a $C_2 \neq 0$ roste (do nekonečna) když $t \to \pm\infty$. Pro $C_1 = 0$ je fázovým portrétem odpovídajících řešení přímka (9.20). Body ležící na této přímce konvergují k počátku souřadnic pro $t \to +\infty$. Je-li $C_2 = 0$, pak je fázovým portrétem odpovídajících řešení přímka (9.21). Body na ní ležící konvergují do nekonečna pro $t \to +\infty$. Triviální řešení $x = y = 0$ je nestabilní. Poznamenejme, že pro $t \to +\infty$ existuje stabilní podprostor řešení, vyhovujících vztahu (9.20). (Viz obr. 9.3.)



Obrázek 9.3: Sedlový bod



Obrázek 9.4: Střed

Bod $(0, 0)$ nazýváme **sedlovým bodem** nebo **hyperbolickým bodem.**

9.4.4 Fázové obrazy v případě ryze komplexních kořenů charakteristické rovnice

Předpokládejme, že kořeny charakteristické rovnice jsou ryze komplexní, tj., $\lambda_{1,2} = \pm qi$ a $q \neq 0$. Obecné řešení systému (9.3) má tvar (viz (9.18))

$$x = \alpha_1 \cos qt + \beta_1 \sin qt, \tag{9.22}$$
$$y = \alpha_2 \cos qt + \beta_2 \sin qt, \tag{9.23}$$

kde konstanty α_1, β_1, α_2 a β_2 mohou záviset na dvou **libovolných** konstantách. Všechna řešení systému (9.22) jsou periodická. Ukážeme, že se jedná o elipsy (nebo kružnice) se středem v počátku souřadnic fázové roviny. Označme

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Protože uvažujeme netriviální řešení, musí být $\Delta \neq 0$. Ze vztahů (9.22), (9.23) dostáváme

$$\cos qt = \begin{vmatrix} x & \beta_1 \\ y & \beta_2 \end{vmatrix} \cdot \Delta^{-1}, \quad \sin qt = \begin{vmatrix} \alpha_1 & x \\ \alpha_2 & y \end{vmatrix} \cdot \Delta^{-1}. \tag{9.24}$$

Dosazením vztahů (9.24) do identity $\cos^2 qt + \sin^2 qt \equiv 1$ dostáváme

$$(\beta_2^2 + \alpha_2^2)x^2 - 2(\beta_2\beta_1 + \alpha_2\alpha_1)xy + (\beta_1^2 + \alpha_1^2)y^2 = \Delta^2. \tag{9.25}$$

Rovnice (9.25) vyjadřuje elipsy (nebo kružnice) se středem v počátku souřadnic. Vysvětleme ještě stručně proč. Z analytické geometrie víme, že křivka daná vztahem

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = d,$$

kde $a > 0$, $c > 0$ a $d > 0$ je elipsou (a ve speciálním případě, kdy $a = c$ kružnicí), platí-li $ac - b^2 > 0$. V našem případě jsou podmínky $a = \beta_2^2 + \alpha_2^2 > 0$, $c = \beta_1^2 + \alpha_1^2 > 0$ a $d = \Delta^2 > 0$ splněny (zdůvodněte proč). Poslední podmínka vede k nerovnosti

$$ac - b^2 = (\beta_2^2 + \alpha_2^2) \cdot (\beta_1^2 + \alpha_1^2) - (\beta_2\beta_1 + \alpha_2\alpha_1)^2 = (\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1)^2 > 0$$

(taktéž zdůvodněte, proč je poslední výraz nenulový) a prověrka podmínek je zakončena. Netriviální trajektorie (9.22) systému (9.3) jsou tedy pro každé $t \geq t_0$ ve fázové rovině ohraničené, mají tvar elips (nebo kružnic) a nekonvergují ani k počátku souřadnic, ani k nekonečnu. Triviální řešení je stabilní. Bod $(0, 0)$ fázové roviny se nazývá **střed.** (Viz obr. 9.4.)

9.4.5 Fázové obrazy v případě komplexních kořenů charakteristické rovnice

Předpokládejme, že kořeny charakteristické rovnice jsou komplexní, ale nikoliv ryze komplexní, tj., $\lambda_{1,2} = p \pm qi$ a $p \neq 0$. Provedeme diskusi dvou případů.

9.4.6 Komplexní kořeny se zápornou reálnou složkou

Předpokládejme, že $p < 0$. Obecné řešení systému (9.3) má tvar (viz (9.18))

$$x = \mathrm{e}^{pt}(\alpha_1 \cos qt + \beta_1 \sin qt),$$
$$y = \mathrm{e}^{pt}(\alpha_2 \cos qt + \beta_2 \sin qt),$$

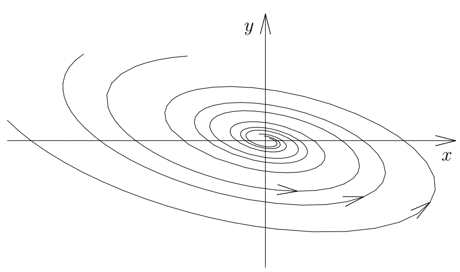
ve kterém konstanty α_1, β_1, α_2 a β_2 závisí na dvou **libovolných** konstantách. Snadno lze obdržet analogický vztah ke vztahu (9.25).

$$(\beta_2^2 + \alpha_2^2)x^2 - 2(\beta_2\beta_1 + \alpha_2\alpha_1)xy + (\beta_1^2 + \alpha_1^2)y^2 = \Delta^2 \cdot \mathrm{e}^{2pt}. \tag{9.26}$$

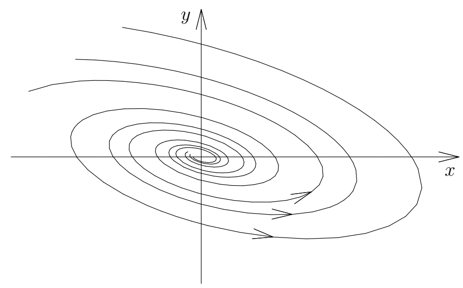
Netriviální řešení (9.18) systému (9.3) konvergují ve fázové rovině při $t \to +\infty$ k počátku souřadnic. Vztah (9.26) je ve fázové rovině spirálou, nekonečněkrát rotující kolem počátku souřadnic a konvergující k počátku souřadnic. Proto je triviální řešení asymptoticky stabilní. Rovnovážný bod $(0, 0)$ fázové roviny v tomto případě nazýváme **ohniskem (stabilním ohniskem).** (Viz obr. 9.5.)

9.4.7 Komplexní kořeny s kladnou reálnou složkou

Předpokládejme, že $p > 0$. Obecné řešení systému (9.3) má tvar (9.18). Fázový portrét je v tomto případě stejný jako v předešlém případě, pouze orientace fázových obrazů řešení je opačná. Vztah (9.26) je ve fázové rovině spirálou, nekonečněkrát rotující kolem počátku souřadnic, vzdalující se od počátku souřadnic a divergující do nekonečna. Triviální řešení je nestabilní. Rovnovážný bod $(0, 0)$ fázové roviny se nazývá **ohniskem (nestabilním).** (Viz obr. 9.6.)



Obrázek 9.5: Stabilní ohnisko



Obrázek 9.6: Nestabilní ohnisko

9.4.8 Fázové obrazy v případě reálných nenulových násobných kořenů charakteristické rovnice

Tvary přípustných řešení byly ukázány v části 9.3.3 (viz vzorce (9.14), (9.16)). Jejich analýzou můžeme dospět k závěru, že obecné řešení má v případě, když $\lambda_1 = \lambda_2$ tvar

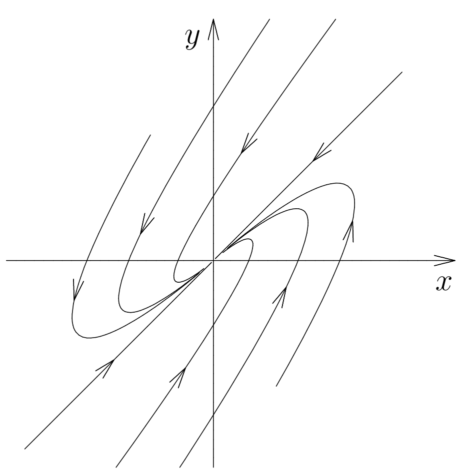
$$x = (\alpha_1 + \beta_1 t)\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \tag{9.27}$$

$$y = (\alpha_2 + \beta_2 t)\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \tag{9.28}$$

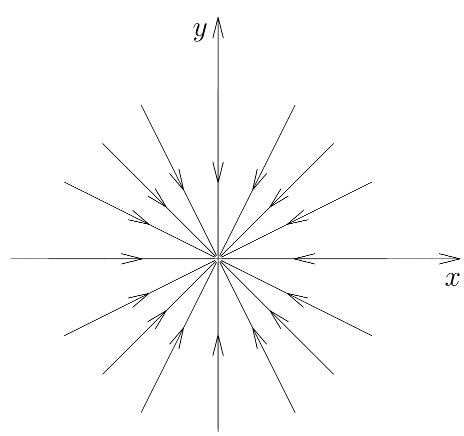
kde konstanty α_1, β_1, α_2, β_2 jsou obecně funkcemi **dvou** libovolných konstant C_1, C_2 a samy koeficienty β_1 a β_2 závisí pouze na jedné libovolné konstantě. Kromě toho platí, že $\beta_1 = C_2 a^*$ a $\beta_2 = C_2 b^*$, kde $a^* = 0$ a $b^* = 0$, je-li hodnost h_1 matice $A - \lambda_1 E$ nulová a $a^* = v_{11}^1$ a $b^* = v_{11}^2$, je-li hodnost této matice $h_1 = 1$. Uvažujme dále dva případy.

9.4.9 Záporné reálné kořeny

Předpokládejme, že $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Obr. 9.7 ukazuje situaci, když $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$ (a tedy, vzhledem k uvedeným vztahům, jsou obě čísla nenulová).



Obrázek 9.7: Stabilní nevlastní uzel



Obrázek 9.8: Stabilní dikritický uzel

V tomto případě mají všechny fázové křivky v počátku souřadnic společnou tečnu $\beta_2 x - \beta_1 y = 0$, neboť

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{\beta_1}{\beta_2}\,.$$

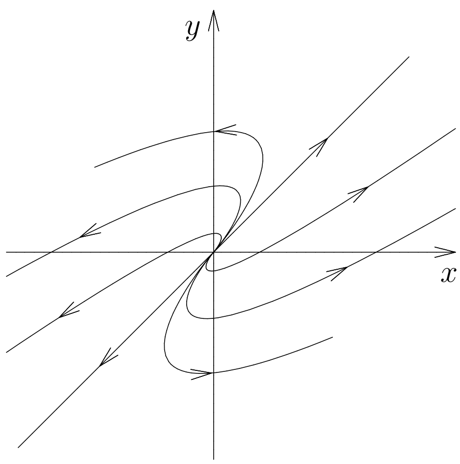
Je-li $\beta_1 = \beta_2 = 0$, pak

$$x = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t},$$
$$y = \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_1 t},$$

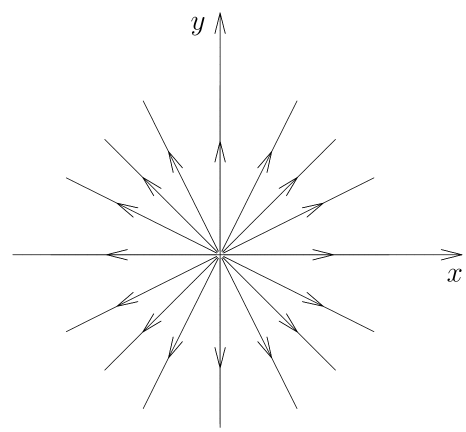
kde α_1 a α_2 jsou libovolné konstanty. V tomto případě je fázový obraz reprezentován přímkami $\alpha_2 x - \alpha_1 y = 0$ (viz obr. 9.8.). V obou případech nazýváme rovnovážný bod $(0, 0)$ **stabilním nevlastním uzlem** a v posledním případě hovoříme o **dikritickém** uzlu. Triviální řešení je asymptoticky stabilní.

9.4.10 Kladné reálné kořeny

Nechť $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Fázový portrét systému je stejný jako v předchozím případě s tím rozdílem, že orientace pohybu je ve fázové rovině opačná. Obrázky 9.9 a 9.10 ukazují příslušné fázové obrazy.



Obrázek 9.9: Nestabilní nevlastní uzel



Obrázek 9.10: Nestabilní dikritický uzel

Rovnovážný bod $(0, 0)$ nazýváme **nestabilním nevlastním uzlem** nebo **nestabilním dikritickým nevlastním uzlem**. Je zřejmé, že triviální řešení je nestabilní.

9.4.11 Fázové obrazy v případě existence jednoduchého nulového kořene charakteristické rovnice

V případě, že nula je nenásobným kořenem charakteristické rovnice vznikají dva případy:

9.4.12 Nulový a záporný kořen charakteristické rovnice

Předpokládejme, že $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 < 0$. Obecné řešení má tvar (viz (9.8)):

$$x = C_1 v_{11}^1 + C_2 v_{12}^1 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \tag{9.29}$$
$$y = C_1 v_{11}^2 + C_2 v_{12}^2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \tag{9.30}$$

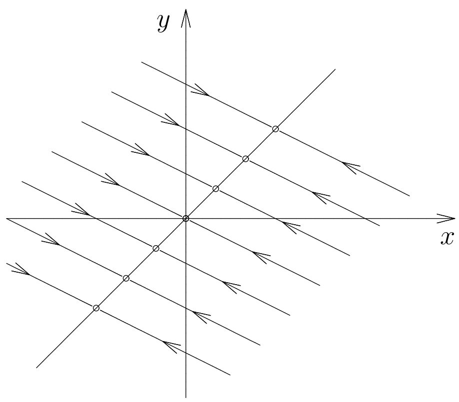
kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. V případě, že $C_2 = 0$, je každý bod $(x, y) = (C_1 v_{11}^1, C_1 v_{11}^2)$ partikulárním konstantním řešením. Tato řešení vyplňují přímku

$$v_{11}^2 x - v_{11}^1 y = 0.$$

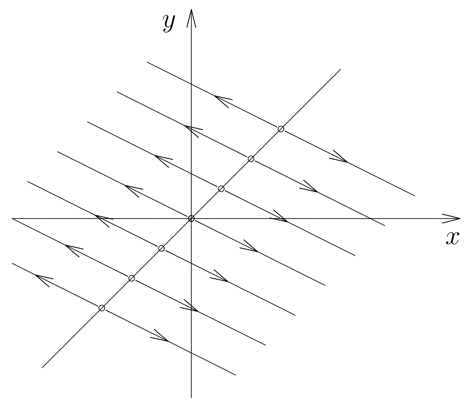
Kromě toho, tato konstantní řešení jsou limitními body jiných řešení (která odpovídají hodnotě $C_2 \neq 0$) s přímkovými fázovými obrazy

$$v_{12}^2(x - C_1 v_{11}^1) - v_{12}^1(y - C_1 v_{11}^2) = 0.$$

Rovnovážný bod $(0, 0)$ je **stabilní**, ale není asymptoticky stabilní. (Viz odpovídající fázový obraz - obr. 9.11.)



Obrázek 9.11: Případ nulového a záporného kořene



Obrázek 9.12: Případ nulového a kladného kořene

9.4.13 Nulový a kladný kořen charakteristické rovnice

Nechť je nyní $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 > 0$. Fázový obraz systému je stejný jako v předchozím případě pouze orientace pohybu je (pro rostoucí t) opačná. (Viz obr. 9.12.) Rovnovážný bod $(0, 0)$ je **nestabilní.**

9.4.14 Fázové obrazy v případě dvojnásobného nulového kořene charakteristické rovnice

Je-li $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, pak má obecné řešení tvar (vyplývající z (9.27)):

$$x = \alpha_1 + \beta_1 t, \tag{9.31}$$

$$y = \alpha_2 + \beta_2 t \tag{9.32}$$

kde konstanty α_1, β_1, α_2, β_2 jsou funkcemi **dvou** libovolných konstant C_1, C_2, konstanty β_1, β_2 však závisí pouze na jedné libovolné konstantě; $\beta_1 = C_2 a^*$ a $\beta_2 = C_2 b^*$, kde $a^* = b^* = 0$, je-li hodnost h_1 matice $A - \lambda_1 E$ nulová a $a^* = v_{11}^1$, $b^* = v_{11}^2$, je-li hodnost této matice $h_1 = 1$. Je-li $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$ (a tedy, vzhledem k uvedeným vztahům, jsou obě čísla nenulová), pak jsou fázové obrazy trajektorií tvořeny přímkami a každý bod na nich konverguje k nekonečnu pro $t \to +\infty$. V tomto případě je rovnovážný bod $(0, 0)$ **nestabilní.** Jestliže $\beta_1 = \beta_2 = 0$, pak má obecné řešení tvar

$$x = \alpha_1, \quad y = \alpha_2,$$

kde jsou α_1 a α_2 libovolnými konstantami. **Každý** bod fázové roviny **stabilním** řešením. Nejedná se však o asymptotickou stabilitu.

Příklad 9.1 *Uvažujme systém*

$$\begin{aligned} x' &= -x - y, \\ y' &= x + y. \end{aligned} \tag{9.33}$$

V tomto případě je $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ *a obecné řešení systému (9.33) má tvar*

$$\begin{aligned} x &= \frac{C_1 + C_2}{2} - C_1 t, \\ y &= \frac{C_1 - C_2}{2} + C_1 t, \end{aligned}$$

kde C_1 *a* C_2 *jsou libovolné konstanty.*

Příklad 9.2 *Systém*

$$\begin{aligned} x' &= 0, \\ y' &= 0 \end{aligned} \tag{9.34}$$

slouží jako ilustrace posledního případu. Skutečně: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ *a obecné řešení systému (9.34) je*

$$x = \alpha_1, \quad y = \alpha_2,$$

kde α_1 *a* α_2 *jsou libovolné konstanty.*

9.5 Shrnutí kapitoly

V kapitole byly klasifikovány všechny možné případy chování dvourozměrného lineárního autonomního systému. Z fázových portrétů bylo patrné v jakých případech lze hovořit o stabilitě řešení (asymptotické či neasymptotické) a kdy je daný systém nestabilní. Tyto vlastnosti byly jednoznačně determinovány vlastnostmi kořenů charakteristické rovnice. Proto při prvotní klasifikaci typu řešení není vůbec nutné nacházet obecné řešení daného systému. Naprosto postačuje zjistit, jakého charakteru zmíněné kořeny jsou. Pro rekapitulaci uveďme, že byly klasifikovány tyto případy: případ záporných a různých kořenů, případ kladných a různých kořenů, případ jednoho kladného a jednoho záporného kořene, případ ryze komplexních kořenů, případ komplexních kořenů se zápornou nebo s kladnou reálnou složkou, případ reálných nenulových násobných kořenů (kladných či záporných), případ jednoho nulového a jednoho záporného (nebo kladného) kořene a případ dvojnásobného nulového kořene.

9.6 Řešené příklady

Příklad 9.3 *Charakterizujte bod* $(0,0)$ *systému*

$$x' = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y, \qquad (9.35)$$
$$y' = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y.$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je stabilním nevlastním uzlem. Skutečně, v tomto případě je $\lambda_1 = -2 < \lambda_2 = -1$. Obecné řešení systému (9.35) je:

$$x = C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{-t},$$
$$y = C_1\mathrm{e}^{-2t} - C_2\mathrm{e}^{-t}.$$

Příklad 9.4 *Charakterizujte bod bod* $(0,0)$ *systému*

$$x' = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y, \qquad (9.36)$$
$$y' = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y.$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je nestabilním vlastním uzlem. Skutečně, v tomto případě $\lambda_1 = 2 > \lambda_2 = 1$. Obecné řešení systému (9.36) je

$$x = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{t},$$
$$y = C_1\mathrm{e}^{2t} - C_2\mathrm{e}^{t}.$$

Příklad 9.5 *Charakterizujte bod* $(0,0)$ *systému*

$$x' = y, \qquad (9.37)$$
$$y' = x$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je sedlovým bodem. V tomto případě je $\lambda_1 = 1 > 0$ a $\lambda_2 = -1 < 0$. Obecné řešení systému (9.37) je:

$$x = C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{-t},$$
$$y = C_1\mathrm{e}^{t} - C_2\mathrm{e}^{-t}.$$

Příklad 9.6 *Charakterizujte bod* $(0,0)$ *systému*

$$x' = \quad y, \qquad (9.38)$$
$$y' = -x.$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je středem. V tomto případě $\lambda_{1,2} = \pm i$. Obecné řešení systému (9.38) je

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{aligned}$$

Fázovým portrétem řešení jsou kružnice, neboť platí $x^2 + y^2 = C_1^2 + C_2^2 > 0$.

Příklad 9.7 *Charakterizujte bod* $(0,0)$ *systému*

$$\begin{aligned} x' &= x - y, \\ y' &= x + y. \end{aligned} \tag{9.39}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je nestabilním ohniskem. Kořeny $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Obecné řešení systému (9.39) je

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{e}^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y &= \mathrm{e}^t(-C_2 \cos t + C_1 \sin t). \end{aligned}$$

Příklad 9.8 *Charakterizujte bod* $(0,0)$ *systému*

$$\begin{aligned} x' &= x + 5y, \\ y' &= -x - 3y. \end{aligned} \tag{9.40}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je stabilním ohniskem, protože $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Obecné řešení systému (9.40) je

$$\begin{aligned} x &= \phantom{\frac{1}{5}}\mathrm{e}^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y &= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-t}((-2C_1 + C_2) \cos t - (C_1 + 2C_2) \sin t). \end{aligned}$$

Příklad 9.9 *Charakterizujte bod* $(0,0)$ *systému*

$$\begin{aligned} x' &= -x, \\ y' &= -y. \end{aligned} \tag{9.41}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je dikritickým stabilním nevlastním uzlem. V tomto případě máme $\lambda_{1,2} = -1$. Obecné řešení systému (9.41) je:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 \mathrm{e}^{-t}, \\ y &= \alpha_2 \mathrm{e}^{-t}, \end{aligned}$$

kde α_1 a α_2 jsou libovolné konstanty.

Příklad 9.10 *Charakterizujte rovnovážný bod* $(0,0)$ *systému*

$$\begin{aligned} x' &= -x, \\ y' &= x. \end{aligned} \tag{9.42}$$

Řešení. V tomto případě je $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -1 < 0$. Jde o stabilní bod. Obecné řešení systému (9.42) má tvar

$$\begin{aligned} x &= \phantom{C_1 - {}} C_2 \mathrm{e}^{-t}, \\ y &= C_1 - C_2 \mathrm{e}^{-t}, \end{aligned}$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Příklad 9.11 *Charakterizujte rovnovážný bod* $(0,0)$ *systému*

$$\begin{aligned} x' &= 3x + y, \\ y' &= -x + y. \end{aligned} \tag{9.43}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je nestabilním nevlastním uzlem, neboť $\lambda_{1,2} = 2$. Obecné řešení systému (9.43) je

$$\begin{aligned} x &= (C_1 + C_2 + C_2 t)\mathrm{e}^{2t}, \\ y &= (-C_1 \phantom{{} + C_2} - C_2 t)\mathrm{e}^{2t} \end{aligned}$$

s libovolnými konstantami C_1 a C_2.

9.7 Cvičení

Příklad 1 *Charakterizujte bod* $(0,0)$ *systému*

$$\begin{aligned} x' &= -3x - 2y, \\ y' &= -2x - 2y. \end{aligned}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je stabilním nevlastním uzlem.

Příklad 2 *Charakterizujte bod* $(0,0)$ *systému*

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 2y, \\ y' &= 2x + 2y. \end{aligned}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je nestabilním vlastním uzlem.

Příklad 3 *Charakterizujte bod* $(0,0)$ *systému*

$$\begin{aligned} x' &= x - 5y, \\ y' &= x - 3y. \end{aligned}$$

Řešení. Bod $(0,0)$ je stabilním ohniskem.

10 Parciální diferenciální rovnice prvního řádu. Některé základní pojmy a metody

10.1 Cíl kapitoly

V předchozích kapitolách jsme se zabývali obyčejnými diferenciálními rovncemi a jejich vlastnostmi. Ukázali jsme si možnosti jejich aplikací. Řešením pro nás byla funkce závisející jen na jedné proměnné, např $y = f(x)$. Jinými slovy, hledali jsme řešení ležící v jedné rovině. Pokud se ale budeme pohybovat v prostoru, potom budeme pracovat s funkcí více proměnných a zde budeme místo derivací používat parciální derivace.
Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře se základy teorie parciálních diferenciálních rovnic. Stanovíme si co budeme rozumět řešením parciální diferenciální rovnice a jaké úlohy budeme řešit.
Potom se zaměříme na parciální diferenciální rovnice prvního řádu. Zformulujeme požadavky kladené na počáteční úlohu pro parciální diferenciální rovnici prvního řádu.
Ukážeme některé způsoby řešení nejjednodušších parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu. Speciálně se budeme věnovat lineární homogenní parciální diferenciální rovnici prvního řádu.

10.2 Pojem řešení parciální diferenciální rovnice

Definice 10.1 *Parciální diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, která obsahuje neznámou funkci více proměnných a její parciální derivace.*
Řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje, se nazývá řádem *dané rovnice.*
Řešením parciální diferenciální rovnice rozumíme každou funkci, která je definovaná v zadané oblasti, včetně svých parciálních derivací, až do řádu rovnice včetně, a vyhovuje dané rovnici v zadané oblasti.

Obecný tvar parciální diferenciální rovnice k-tého řádu ve které je hledaná funkce u funkcí n nezávislých proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$, tj. $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, je

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0. \quad (10.1)$$

Příklad 10.1 *Hledejme funkci u, která vyhovuje rovnici*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (10.2)$$

Máme tedy parciální diferenciální rovnici prvního řádu. Jejím řešením je funkce

$$u(x, y) = x - y + \pi,$$

protože

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1,$$

v každém bodě roviny Oxy. Číslo π můžeme nahradit jiným libovolným reálným číslem. Všimněme si, že tato řešení jsou z geometrického hlediska plochami v prostoru (x, y, z). Obdobně se můžeme přesvědčit, že řešením bude i funkce

$$u(x, y, z) = x - y + z,$$

protože

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Lehce si ověříme, že řešením bude i každá funkce

$$u(x, y, z) = x - y + f(z),$$

kde f je libovolná funkce proměnné z.

Z uvedeného příkladu plyne jeden podstatný rozdíl mezi parciálními rovnicemi a obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Ze zápisu obyčejné diferenciální rovnice, například $y' = x + y$, okamžitě poznáme, že hledaná funkce y závisí pouze na x. Ze zápisu parciální rovnice (10.2) nepoznáme na kolika proměnných závisí řešení. Víme, že hledaná funkce u závisí na proměnných x, y, ale nevíme, zda se jedná o všechny nezávislé proměnné na kterých češení závisí, tedy zda jde o funkci dvou, tří či více proměnných.
Přijmeme proto hned na místě úmluvu, že řešení dané parciální rovnice budeme hledat pouze mezi funkcemi těch proměnných, které se přímo v rovnici vyskytují. Bude-li hledaná neznámá funkce záviset i na proměnných, které se v rovnici nevyskytují, bude to při zápisu rovnice výslovně zdůrazněno.

Příklad 10.2 *Hledáme funkci dvou proměnných $u(x, y)$, která vyhovuje rovnici*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{10.3}$$

Máme parciální diferenciální rovnici druhého řádu. Jejím řešením je funkce

$$u(x, y) = x^2 - y^2,$$

protože

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2,$$

v každém bodě roviny Oxy.
Obdobně se můžeme přesvědčit, že řešením budou i funkce

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + ax + by, \quad a, b \in R,$$

a nebo

$$u(x, y) = e^x \sin y.$$

10.3 Základní problémy řešení parciálních diferenciálních rovnic

Výše uvedené příklady ukazují na podstatnou skutečnost, že určení řešení parciální diferenciální rovnice bude pravděpodobně obtížnější, než tomu bylo u obyčejných diferenciálních rovnic.
Podobně jako u obyčejných diferenciálních rovnic máme i u parciálních rovnic dva základní problémy

1. Najít obecné řešení dané parciální rovnice, tj. najít všechna její řešení.
2. Najít takové řešení dané parciální rovnice, které vyhovuje některým doplňujícím podmínkám (které obvykle plynou z daného technického problému, který řešíme a nebo jsou součástí zadání matematického úkolu, jako další „trápení" lidu studentského).

Najít obecné řešení parciální diferenciální rovnice může být mnohem obtížnější než u obyčejných diferenciálních rovnic. Parciální diferenciální rovnice často studujeme společně s dodatečnými podmínkami (počátečními a okrajovými).

10.4 Parciální diferenciální rovnice prvního řádu

Definice 10.2 *Rovnici*

$$f\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{10.4}$$

nazýváme parciální diferenciální rovnicí prvního řádu*, kde funkce $f(x, y, u, p, q)$ je definovaná na otevřené množině D proměnných x, y, u, p, q.*

Definice 10.3 Řešením *rovnice* (10.4) *v oblasti G proměnných x, y nazveme každou takovou funkci u, definovanou a spojitou v G, pro kterou platí:*

1. *Funkce u má v oblasti G spojité parciální derivace prvního řádu.*
2. *Pro každé $(x, y) \in G$ platí, že $\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \in D$.*
3. *Funkce $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ splňují rovnici* (10.4).

Příklad 10.3 *Rovnice*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0$$

má řešením funkci

$$u = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

která je definována v oblasti $G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \neq 0\}$ (neboli funkce u je definována pro všechny body roviny Oxy kromě počátku, t.j. bodu $(0, 0)$).

Příklad 10.4 *Rovnice*

$$u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\ln(xy) = \frac{x^2+y}{x^2y}\ln(xy)$$

má jedním z řešení funkci $u = \ln(xy)$, která je definována v oblasti $G = \{(x,y) : xy > 0\}$, neboli u je definována pro všechny vnitřní body prvního a třetího kvadrantu roviny Oxy.

Poznámka 10.1 *Pro určení řádu rovnice je rozhodující, jakého řádu jsou parciální derivace, které se v ní vyskytují, ne mocniny těchto derivací.*

10.5 Formulace počáteční úlohy, pojem jejího řešení.

U obyčejných diferenciálních rovnic jsme se mj. zabývali počáteční Cauchyovou úlohou

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

U parciálních diferenciálních rovnic je formulace podobné úlohy uvedena v následující definici.

Definice 10.4 *Cauchyovou úlohou pro rovnici (10.4) rozumíme dvojici: rovnici*

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \tag{10.5}$$

a počáteční křivku Θ zadanou parametricky

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in (a,b). \tag{10.6}$$

Funkci $z = h(x,y)$, která má spojité parciální derivace v G, nazveme řešením Cauchyovy úlohy (10.5), (10.6), jestliže funkce h splňuje v G rovnici (10.5) a pro všechna $t \in (a,b)$ křivka $(x = \varphi(t), y = \psi(t))$ leží v G a navíc platí $\chi(t) = h(\varphi(t), \psi(t))$.

O křivce Θ budeme všude dále předpokládat, že je hladká a jednoduchá.

10.6 Nejjednodušší příklady parciálních rovnic prvního řádu

10.6.1 Rovnice typu $\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x} = 0$.

Řešením rovnice

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = 0 \tag{10.7}$$

je buď libovolná konstanta a nebo libovolná funkce závisející pouze na proměnné y, která bude mít spojité parciální derivace,

$$z(x,y) = H(y). \tag{10.8}$$

Podívejme se, jaký je geometrický význam rovnice (10.7).
V prostoru $Oxyz$ jde o rovnici válcové plochy, jejíž přímky jsou kolmé na rovinu Oyz a jsou tedy rovnoběžné s x-ovou souřadnicovou osou.
Potom lze řešit Cauchyovu úlohu pro rovnici (10.7). Máme-li danou křivku Θ, pak každým bodem křivky vedeme přímku rovnoběžnou s osou x. Dostaneme tak plochu, která je zřejmě řešením rovnice (10.7) a prochází křivkou Θ.
Křivka Θ přitom může být i prostorová, t.j. nepožadujeme, aby byla závislá pouze na proměnné y.
Vraťme se nyní zpět k analytickému řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici (10.7).
Nechť je křivka Θ zadána parametricky

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad a < t < b.$$

Předpokládejme, že pro funkce $\psi(t), \chi(t)$ platí, že mají spojité derivace v intervalu (a, b) a že funkce $\psi(t)$ je ryze monotónní (potom pro ni existuje funkce inverzní $\psi^{-1}(t)$ taková, že $\psi(\psi^{-1}(y)) = y$).
Předpokládejme, že existuje řešení $z = H(y)$ Cauchyovy úlohy pro rovnici (10.7) a že známe křivku Θ. Potom dosazením zjistíme, že platí

$$\chi(t) = H\left(\psi(t)\right). \tag{10.9}$$

Dosadíme do této rovnice $t = \psi^{-1}(y)$, dostaneme

$$\chi\left(\psi^{-1}(y)\right) = H(y), \tag{10.10}$$

a protože $H(y) = z$, máme

$$\chi\left(\psi^{-1}(y)\right) = z.$$

Tím je dokázána jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy.
Z druhé strany, definujeme funkci H pomocí rovnosti (10.10). Potom ale platí

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

neboli funkce (10.10) je řešením rovnice (10.7) a současně platí (10.9), což znamená, že řešení prochází křivkou Θ.

Příklad 10.5 *Najděte řešení rovnice*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

které prochází křivkou

$$x = \varphi(t) = t, \quad y = \psi(t) = t^2, \quad z = \chi(t) = t^3, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Řešení: Podle (10.10) platí, že jediným řešením této úlohy je

$$z = \chi\left(\psi^{-1}(y)\right).$$

V našem případě máme

$$\chi(t) = t^3, \quad \psi^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

Řešením je proto

$$z = \left(\sqrt{y}\right)^3.$$

□

Příklad 10.6 *Najděte řešení rovnice*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

které prochází křivkou

$$x = 0, \quad z = y^2, \quad y \in (-1, 1).$$

Řešení: Počáteční křivku můžeme zapsat také takto

$$x = \varphi(t) = 0, \quad y = \psi(t) = t, \quad z = \chi(t) = t^2, \quad t \in (-1, 1).$$

Křivka Θ je v našem případě parabola, která leží v rovině Oyz. Podle předchozího platí, že řešením je válcová plocha, která prochází křivkou Θ a je rovnoběžná s x-ovou osou, takže

$$z = y^2$$

je řešením. □

Poznámka 10.2

1. *Zcela analogicky jako rovnice* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ *se řeší rovnice*

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 0.$$

2. *Předpoklad existence inverzní funkce* ψ^{-1} *je nezbytný pro existenci a jednoznačnost řešení. Pokud není splněn, Cauchyova úloha nemusí být řešitelná a nebo může mít nekonečně mnoho řešení.*

3. *Postup použitý při hledání řešení rovnice* (10.7) *můžeme zobecnit i pro parciální diferenciální rovnici více než dvou proměnných*

$$\frac{\partial z(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = 0 \quad i = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Řešením této rovnice bude funkce $z = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1} \ldots, x_n)$*, která nezávisí na* x_i.

10.6.2 Rovnice typu $\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x} = f(x,y)$.

Řešení rovnice

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = f(x,y), \tag{10.11}$$

za předpokladu, že $f(x,y)$ je spojitá funkce v oblasti G, je dáno vztahem

$$z = \int f(x,y)dx + H(y). \tag{10.12}$$

Důkaz existence a jednoznačnosti řešení se provádí stejně jako v předchozím případě.

Příklad 10.7 *Najděte řešení rovnice*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 + xy - y^2,$$

které prochází křivkou

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t, \quad t > 0.$$

Řešení: Křivka Θ je v našem případě osou prvního oktantu. Řešení získáme integrací podle proměnné x:

$$z = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} - xy^2 + H(y).$$

Řešení musí procházet křivkou Θ. Dosazením za x, y, z parametrické vyjádření křivky Θ, dostaneme, že musí platit

$$t = \frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{2} - t^3 + H(t).$$

Odtud dostáváme

$$H(t) = t + \frac{t^3}{6}.$$

Řešením naší úlohy je funkce

$$z = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} - xy^2 + y + \frac{y^3}{6}$$

□

10.6.3 Rovnice typu $\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x} = f(x,y)$ s počáteční podmínkou $z(0,y) = \omega(y)$.

Hledejme nyní řešení rovnice (10.11), které vyhovuje podmínce

$$z(0,y) = \omega(y). \tag{10.13}$$

Neboli řešení $z = z(x,y)$ má procházet křivkou

$$x = 0, \quad z = \omega(y),$$

která leží v rovině Oyz. Podle vzorce (10.12) má řešení tvar

$$z(x,y) = \int_0^x f(\xi,y)\mathrm{d}\xi + H(y). \tag{10.14}$$

Dosadíme do této rovnice podle podmínky (10.13) hodnotu $x = 0$, dostaneme

$$\omega(y) = H(y).$$

Hledané řešení má proto tvar

$$z(x,y) = \int_0^x f(\xi,y)\mathrm{d}\xi + \omega(y).$$

Příklad 10.8 *Najděte řešení rovnice*

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + y\sin x,$$

které prochází křivkou $z(0,y) = y^3$.

Řešení: Podle předchozího můžeme hned psát

$$z(x,y) = \int_0^x (3\xi^2 + y\sin\xi)\mathrm{d}\xi + y^3.$$

Po integraci dostaneme řešení ve tvaru

$$z(x,y) = x^3 + y^3 + y(1 - \cos x).$$

□

Poznámka 10.3

1. *Analogicky jako rovnice $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f(x,y)$ se řeší i rovnice $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f(x,y)$.*
2. *Obdobně jako u rovnice $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ i u rovnice $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f(x,y)$ se může stát, že rovnice nemá řešení a nebo je řešení nekonečně mnoho.*

10.6.4 Rovnice typu $\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x} = f_1(x)\cdot f_2(z)$.

Mějme rovnici

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = f_1(x)\cdot f_2(z), \tag{10.15}$$

kde funkce f_1 je spojitá na intervalu (a,b) a f_2 je spojitá a nenulová ($f_2 \neq 0$) na intervalu (c,d).

Řešení parciální rovnice (10.15) je analogické řešení obyčejné diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = f_1(x)\cdot f_2(z),$$

$$\int \frac{1}{f_2(z)}\mathrm{d}z = \int f_1(x)\mathrm{d}x + H(y).$$

Označme $F_1(x) = \int f_1(x)\mathrm{d}x, \quad F_2(z) = \int \frac{1}{f_2(z)}\mathrm{d}z$, potom můžeme předchozí rovnici přepsat na tvar

$$F_2(z) = F_1(x) + H(y).$$

Pokud je funkce F_2 ryze monotonní, potom můžeme z rovnice vypočítat funkci z a dostaneme

$$z(x,y) = F_2^{-1}[F_1(x) + H(y)]. \tag{10.16}$$

Přitom musíme požadovat, aby funkce $F_1(x)+H(y)$ ležela v definičním oboru funkce F_2^{-1}. Pouze tehdy má řešení smysl.

Příklad 10.9 *Najděte řešení rovnice*

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = x\cdot \mathrm{e}^z \tag{10.17}$$

Řešení: Rovnici si upravíme podle předchozího.

$$F_1(x) = \int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2},$$

$$F_2(z) = \int \mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{-z}$$

Po dosazení máme

$$-\mathrm{e}^{-z} = \frac{x^2}{2} + H(y).$$

Protože na pravé straně máme ryze monotonní funkci, můžeme rovnici rozřešit vzhledem k z a dostaneme

$$z = -\ln\left(-\frac{x^2}{2} - H(y)\right), \tag{10.18}$$

což je řešení rovnice (10.17). Výraz bude mít smysl pouze pro

$$\left(-\frac{x^2}{2} - H(y)\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x^2}{2} + H(y)\right) < 0.$$

□

Pokud v rovnici (10.15) neplatí podmínka $f_2(z) \neq 0$, potom mohou existovat i řešení, která nezískáme pomocí vztahu (10.16).

Příklad 10.10 *Najděte řešení rovnice*

$$\frac{\partial z}{\partial(}x,y)x = z. \tag{10.19}$$

Řešení: Rovnici (10.19) si upravíme podle předchozího postupu (viz 10.16).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int \mathrm{d}x,$$

$$\ln z = x + H(y),$$

$$z = \mathrm{e}^{x+H(y)},$$

$$z = K(y)\mathrm{e}^{x},$$

kde $K(y) = \mathrm{e}^{H(y)}$.
Rovnice (10.19) má ale ještě řešení $z = 0$, které nezískáme žádnou volbou funkce $H(y)$, respektive $K(y)$. □
Právě uvedený postup můžeme použít i pro ty rovnice, které obsahují pouze jednu parciální derivaci, tedy pro rovnice tvaru

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = \varphi(x,y,z)$$

a nebo

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = \psi(x,y,z).$$

Vztah (10.16) můžeme použít i pro řešení Cauchyovy úlohy pro odpovídající typy rovnic. Protože obecný postup by byl příliš nepřehledný, ukážeme si použití na příkladech.

10.6.5 Lineární homogenní parciální rovnice prvního řádu

Definice 10.5 *Lineární parciální diferenciální rovnicí nazveme výraz*

$$a(x,y)\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = c(x,y)\cdot z(x,y) + d(x,y), \tag{10.20}$$

kde a, b, c, d jsou funkce proměnných x, y definované na otevřené množině G.
Jestliže $c(x,y) \equiv 0, d(x,y) \equiv 0$, potom se rovnice (10.20) nazývá homogenní.

10.7 Shrnutí kapitoly

Seznámili jsme se s úvodními pojmy, týkajícími se parciálních diferenciálních rovnic. Definovali jsme si obecnou parciální diferenciální rovnici a její řád.
Podrobněji jsme se seznámili s parciálními diferenciálními rovnicemi prvního řádu. Byla zformulována počáteční úloha pro parciální difeerenciální rovnici prvního řádu.
Naučili jsme se řešit nejjednodušších parciální diferenciální rovnice prvního řádu. Protože v aplikacích se z parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu nejčastěji vyskytuje lineární homogenní parciální diferenciální rovnice, věnovali jsme jí zvláštní pozornost.

10.8 Řešené příklady

Příklad 10.11 *Určete řešení Cauchyovy úlohy*

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = z(x,y),$$

$$z(0,y) = y^2.$$

Řešení: Jde o stejnou rovnici jako v předchozím příkladu 10.10. Řešení proto bude mít tvar

$$z(x,y) = K(y)\mathrm{e}^x.$$

Dosadíme do něj $x = 0$ a dostaneme

$$z(0,y) = y^2 = K(y).$$

Řešením Cauchyovy úlohy je proto funkce

$$z(x,y) = y^2\mathrm{e}^x.$$

□

Příklad 10.12 *Určete řešení Cauchyovy úlohy*

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = ax + by + c\cdot z(x,y) + d,$$

$$z(0,y) = y^3 + 2y,$$

kde a, b, c, d jsou konstanty, přičemž $c \neq 0$.

Řešení: Budeme považovat y za konstantu a řešíme parciální rovnici jako obyčejnou diferenciální rovnici.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - c\cdot z = ax + by + d.$$

Použijeme metodu variace konstanty. Nejdříve řešíme homogenní rovnici (o pravé straně předpokládáme že je rovna nule).

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - c\cdot z = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = c\cdot z,$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = c\,\mathrm{d}x.$$

$$\ln z = cx + K,$$

$$z = L\mathrm{e}^{cx},$$

kde $L = \mathrm{e}^K$. Nyní předpokládáme, že $L = L(x, y)$, kde y je konstantou. Potom derivace L' bude značit derivaci podle proměnné x a

$$\begin{aligned} z' &= L'\mathrm{e}^{cx} + Lc\mathrm{e}^{cx}, \\ L'\mathrm{e}^{cx} + Lc\mathrm{e}^{cx} &= ax + by + cL\mathrm{e}^{cx} + d, \\ L'\mathrm{e}^{cx} &= ax + by + d, \\ L' &= (ax + by + d)\mathrm{e}^{-cx}. \end{aligned}$$

Integrací „per partes“ dostaneme

$$\left| \begin{array}{ll} u = ax + by + d & u' = a \\ v' = \mathrm{e}^{-cx} & v = \mathrm{e}^{-cx} \cdot \left(\dfrac{-1}{c}\right) \end{array} \right|$$

$$L = (ax + by + d)\mathrm{e}^{-cx} \cdot \left(\frac{-1}{c}\right) + \frac{a}{c}\int \mathrm{e}^{-cx}\mathrm{d}x,$$

$$L = (ax + by + d)\mathrm{e}^{-cx} \cdot \left(\frac{-1}{c}\right) - \frac{a}{c^2}\mathrm{e}^{-cx} + M.$$

Po dosazení dostaneme řešení ve tvaru

$$z = -\frac{1}{c}(ax + by + d) - \frac{a}{c^2} + M\mathrm{e}^{cx}.$$

Tím jsme získali řešení diferenciální rovnice. Pro řešení parciální rovnice je nutné místo konstanty M brát funkci $H(y)$.

$$z = -\frac{1}{c}(ax + by + d) - \frac{a}{c^2} + H(y)\mathrm{e}^{cx}.$$

Nyní najdeme řešení, které vyhovuje naší počáteční podmínce. Dosazením do předchozí rovnice hodnoty $x = 0$ dostaneme

$$y^3 + 2y = -\frac{b}{c}y - \frac{d}{c} - \frac{a}{c^2} + H(y),$$

a odtud plyne

$$H(y) = y^3 + 2y + \frac{b}{c}y + \frac{d}{c} + \frac{a}{c^2}.$$

Řešením Cauchyovy úlohy je tedy funkce

$$z = -\frac{1}{c}(ax + by + d) - \frac{a}{c^2} + \left(y^3 + \left(2 + \frac{b}{c}\right)y + \frac{d}{c} + \frac{a}{c^2}\right)\mathrm{e}^{cx}.$$

$\square$

10.9 Cvičení

Příklad 4 *Najděte funkci* $z = z(x, y)$*, vyhovující diferenciální rovnici*

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 1.$$

Řešení. Řešením úlohy je funkce

$$z(x, y) = x + \varphi(y),$$

kde $\varphi(y)$ je libovolná funkce.

11 Charakteristický systém a charakteristiky. Pfaffova rovnice.

11.1 Cíl kapitoly

V předchozí kapitole jsme si definovali parciální diferenciální rovnici a ukázali jsme si řešení nejjednodušších parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu.
Cílem této kapitoly je pokračovat v teorii parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu. Zavedeme si pojem charakteristického systému a charakteristik. Ukážeme si co budeme rozumět pod pojmy obecné řešení a první integrál. Tyto pojmy nám budou sloužit pro nalezení řešení určitých typů parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu.
Poslední část bude věnovaná Pfaffově rovnici a jejímu řešení.

11.2 Charakteristický systém.

Mějme nyní lineární parciální homogenní rovnicí

$$a(x,y)\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=0. \tag{11.1}$$

kde a, b jsou funkce proměnných x, y definované na otevřené množině G takové, že obě nejsou současně nulové.
Uvažujme dále soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$x'(t)=a(x(t),y(t)),\quad y'(t)=b(x(t),y(t)). \tag{11.2}$$

Předpokládejme, že partikulárním řešením soustavy (11.2) je $x=\varphi(t), y=\psi(t)$. Toto řešení představuje nějakou křivku Θ v rovině Oxy.
Všimněme si nyní řešení rovnice (11.1) podél křivky Θ. Máme funkci

$$z=z(t)=z(x(t),y(t))=z(\varphi(t),\psi(t)).$$

Pro její derivaci platí

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial x}x'+\frac{\partial z}{\partial y}y'=\frac{\partial z}{\partial x}a+\frac{\partial z}{\partial y}b=0.$$

Protože derivace je rovna nule, je derivovaná funkce konstantní:

$$u(\varphi(t),\psi(t))\equiv\text{const}.$$

Jinak řečeno - každé řešení rovnice (11.1) je konstantní podél křivky Θ. Tento jev je typickým jevem pro daný typ parciálních diferenciálních rovnic.

Definice 11.1 *Systém (11.2) se nazývá charakteristickým systémem rovnice (11.1) a jeho řešení, která určují křivky Θ, nazýváme charakteristikami.*

Příklad 11.1 *Najděte charakteristiky rovnice*

$$2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Řešení: Sestavíme charakteristický systém (11.2). V našem případě je $a = 2, b = 1$. Hledáme řešení systému

$$x'(t) = 2,$$
$$y'(t) = 1.$$

Řešením je

$$x = 2t + \alpha, \quad y = t + \beta,$$

kde α, β jsou konstanty. Z první rovnice si vyjádříme parametr t a dosadíme do druhé.

$$t = \frac{x - \alpha}{2},$$

$$y = \frac{x - \alpha}{2} + \beta,$$

$$y = \frac{x}{2} + \gamma,$$

kde $\gamma = \beta - \dfrac{\alpha}{2}$ je konstanta.

Řešením zadaného systému je soustava přímek $y = \dfrac{x}{2} + \gamma$, které tvoří hledané charakteristiky. □

Příklad 11.2 *Najděte charakteristiky rovnice*

$$9y\frac{\partial u}{\partial x} - 4x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Řešení: Sestavíme si charakteristický systém. Máme $a = 9y, b = -4x$, takže hledáme řešení systému

$$x'(t) = 9y,$$
$$y'(t) = -4x.$$

První rovnici vynásobíme $4x$ a druhou $9y$ a sečteme, dostaneme

$$4xx' + 9yy' = 0,$$

což je rovnice se separovanými proměnnými. Její integrací dostaneme

$$4\frac{x^2}{2} + 9\frac{y^2}{2} = C,$$

$$4x^2 + 9y^2 = 2C.$$

Řešením zadaného systému jsou všechny elipsy $4x^2 + 9y^2 = 2C,\ C > 0,\ C \in \mathbb{R}$, které tvoří hledané charakteristiky. □

11.3 První integrály, existence řešení, obecné řešení

Zabývejme se systémem (11.2), ve kterém platí $a^2 + b^2 \neq 0$, který zapíšeme ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(x(t), y(t)),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = b(x(t), y(t)).$$

Pokud vyloučíme dt, dostaneme systém v kanonickém tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{a(x,y)} = \frac{\mathrm{d}y}{b(x,y)}. \tag{11.3}$$

11.3.1 První integrály

Definice 11.2 *Funkci $z(x, y)$ nazveme prvním integrálem systému (11.3) v oblasti D, jestliže $z(x, y)$ je konstantní podél každého řešení systému (11.3), které celé leží v D a jestliže $z(x, y)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v D.*

Příklad 11.3 *Najděte první integrál systému*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4x.$$

Řešení: Integrací první rovnice dostaneme

$$x(t) = 2t + C.$$

Dosazením do druhé rovnice dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4(2t + C),$$

$$y(t) = \int (8t + 4C)\mathrm{d}t = 4t^2 + 4Ct + D.$$

Tím máme určeno řešení.
Jestliže si dále vyjádříme t z první rovnice a dosadíme do druhé, dostaneme

$$t = \frac{x - C}{2},$$

$$y = 4\left(\frac{x - C}{2}\right)^2 + 4C\left(\frac{x - C}{2}\right) + D,$$

$$y = x^2 - C^2 + D.$$

Označme $D - C^2 = P$, dostaneme $y = x^2 + P$ a nebo

$$y - x^2 = P.$$

Prvním integrálem je proto funkce $y - x^2$. □

11.3.2 Věty o existenci a jednoznačnosti řešení

Věta 11.1 *Nechť $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in (\alpha, \beta)$ je řešení soustavy (11.2) a nechť funkce $z = z(x, y)$ je řešením parciální rovnice (11.1) a nechť pro všechna $t \in (\alpha, \beta)$ je bod $(\varphi(t), \psi(t))$ z definičního oboru funkce $z(x, y)$. Potom $z = z(\varphi(t), \psi(t)) = C,\ C \in \mathbb{R}$.*

Větu můžeme vyslovit i jinak: Řešení rovnice (11.1) jsou konstantní podél charakteristik. Každé řešení rovnice (11.1) je prvním integrálem (11.2)

Věta 11.2 *Jestliže funkce $z = z(x, y)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v oblasti D a jestliže každým bodem $(x_0, y_0) \in D$ prochází charakteristika soustavy (11.2) a navíc je funkce $z = z(x, y)$ konstantní podél každé charakteristiky, potom je $z(x, y)$ řešením parciální rovnice (11.1).*

Pokud obě věty shrneme dohromady, dostaneme:

Věta 11.3 *Funkce $z = z(x, y)$ je řešením lineární homogenní rovnice (11.1) právě tehdy, když je prvním integrálem soustavy (11.3).*

Příklad 11.4 *Najděte řešení rovnice*

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Řešení: Sestavíme si odpovídající charakteristickou soustavu, která má tvar

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= x^2, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= y^2. \end{aligned}$$

Soustavu si upravíme pro $x \neq 0,\ y \neq 0$ na tvar

$$\frac{1}{x^2} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1, \quad \frac{1}{y^2} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1.$$

Od první rovnice odečteme druhou a dostaneme

$$\frac{1}{x^2} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{y^2} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0,$$

neboli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 0.$$

To ale znamená, že funkce $z = -\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ má podél charakteristik derivace podle t rovnu nule a je tedy zde konstantní. Proto se jedná o první integrál. Protože navíc má spojité parciální derivace (již dříve jsme předpokládali, že $x \neq 0,\ y \neq 0$), potom to podle předchozí věty znamená, že funkce z je řešením naší parciální rovnice.

O správnosti se můžeme přesvědčit přímým výpočtem.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}{\partial x} = \frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}.$$

Dosazením do původní rovnice dostaneme

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\frac{1}{x^2} + y^2\left(-\frac{1}{y^2}\right) = 0.$$

□

Věta 11.4 O jednoznačnosti řešení.
Nechť mají funkce $a(x,y), b(x,y)$ spojité parciální derivace prvního řádu v oblasti D, nechť dále existuje křivka Θ zadaná parametrickými rovnicemi $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\chi(t), t \in (\alpha,\beta)$ taková, že její průmět do roviny Oxy leží v D. Nechť dále pro $t \in (\alpha,\beta)$ platí nerovnost

$$\begin{vmatrix} a(\varphi(t),\psi(t)) & b(\varphi(t),\psi(t)) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{11.4}$$

Potom existuje podoblast $D_1 \subset D$ obsahující křivku Θ taková, že řešení $z = z(x,y)$ parciální rovnice (11.1), které splňuje podmínku

$$z(\varphi(t),\psi(t)) = \chi(t), \qquad \textit{pro všechna} \quad t \in (\alpha,\beta), \tag{11.5}$$

je jednoznačně určené v D_1.

Věta má pouze lokální charakter. Zaručuje nám jednoznačnost v některém okolí křivky Θ.
Pokud pracujeme s funkcemi více proměnných, postupujeme analogicky. Uvedeme nyní ilustrativní příklad.

Příklad 11.5 *Najděte řešení rovnice*

$$(y+z-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (x+z-y)\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Řešení: Sestavíme charakteristickou soustavu, která má tvar

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= y+z-x, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= x+z-y, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= z. \end{aligned}$$

Nyní sečteme první a druhou rovnici a odečteme odtud dvojnásobek třetí rovnice a dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0.$$

A po úpravě máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x + y - 2z) = 0,$$

neboli funkce $u = x + y - 2z$ má podél charakteristik derivace podle t rovnu nule a je tedy zde konstantní a proto se jedná o první integrál. Navíc má spojité parciální derivace a potom podle předchozí věty to znamená, že je u řešením naší parciální rovnice.
O správnosti se můžeme přesvědčit přímým výpočtem.
Existují i další možnosti, které můžeme získat analogickým způsobem.
Přesvědčete se sami, že řešením jsou i funkce

$$u_1 = \ln \frac{z}{\sqrt{x-y}},$$

$$u_2 = \frac{z^2}{x-y}.$$

□

11.3.3 Kvazilineární parciální diferenciální rovnice

Definice 11.3 *Kvazilineární parciální diferenciální rovnicí nazveme výraz*

$$a(x,y,z)\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} + b(x,y,z)\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = c(x,y,z), \tag{11.6}$$

kde a, b, c jsou funkce proměnných x, y, z definované na otevřené množině G.

Řešení kvazilineární rovnice lze převést na řešení rovnice lineární. Předpokládejme, že známe funkci $z(x,y)$, která je řešením rovnice (11.6) a že platí

$$U(x,y,z) = 0, \tag{11.7}$$

kde funkce U má spojité parciální derivace. Potom platí

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

První rovnici vynásobíme funkcí $a(x,z,y)$ a druhou funkcí $b(x,y,z)$ a sečteme je. (Argumenty funkcí jsou pro přehlednost vynechány.)

$$a\frac{\partial U}{\partial x} + a\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + b\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\left(a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

Navíc podle rovnice (11.6) platí, že závorka v předchozím výrazu je rovna c, takže jsme dostali

$$a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = 0. \tag{11.8}$$

Dokázané tvrzení lze obrátit. My jej budeme používat častěji v obráceném tvaru:

Věta 11.5 *Nechť funkce $U = U(x, y, z)$ je definována v $D \subset \mathbb{R}^3$, má zde spojité parciální derivace, splňuje rovnici (11.8) a $\dfrac{\partial U}{\partial z} \neq 0$. Nechť funkce $z = z(x, y)$ je řešením rovnice (11.7), má spojité parciální derivace a $z = z(x, y) \in D$, potom je funkce z řešením rovnice (11.6).*

Příklad 11.6 *Najděte řešení rovnice*

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 3.$$

Řešení: Hledáme funkci U, která bude splňovat rovnici (11.8). Takže má platit

$$\frac{\partial U}{\partial x} + 2\frac{\partial U}{\partial y} + 3\frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Sestavíme si charakteristickou soustavu, která má tvar

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2,$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 3.$$

Nyní sečteme první a druhou rovnici a odečteme odtud třetí rovnici a dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Integrací dostaneme první integrál

$$x + y - z.$$

Jestliže první rovnici charakteristické soustavy vynásobíme třemi a odečteme od ní poslední rovnici, dostaneme

$$3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0,$$

a první integrál je potom

$$3x - z.$$

Jestliže druhou rovnici charakteristické soustavy vynásobíme třemi a odečteme od ní dvojnásobek třetí rovnice, dostaneme

$$3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$$

a první integrál je potom

$$3y - 2z.$$

Vyjádříme si z prvních integrálů funkci z a dostaneme tak tři různá řešení naší rovnice:

$$z_1(x,y) = x + y, \quad z_2(x,y) = 3x, \quad z_3(x,y) = \frac{3}{2}y.$$

O správnosti se můžeme přesvědčit přímým výpočtem. □

Příklad 11.7 *Najděte řešení rovnice*

$$(z-y)\frac{\partial u}{\partial x} + (x-z)\frac{\partial u}{\partial y} + (y-x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

které vyhovuje podmínnce

$$u(0,y,z) = yz.$$

Řešení: Najdeme nejdříve řešení. Sestavíme si charakteristickou soustavu, která má tvar

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = z - y,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - z,$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = y - x.$$

Sečteme rovnice a dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Integrací dostaneme první integrál

$$u_1(x,y,z) = x + y + z.$$

Jestliže první rovnici charakteristické soustavy vynásobíme $2x$ a druhou $2y$ a poslední rovnici $2z$ a sečteme, dostaneme

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0,$$

a první integrál je potom

$$u_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Tím jsme získali dvě řešení naší rovnice. Navíc jestliže F je libovolná funkce dvou proměnných se spojitými parciálními derivacemi, potom je řešením naší rovnice i funkce

$$u(x,y,z) = F(x+y+z, x^2+y^2+z^2).$$

Hledáme nyní funkci, která splňuje naši podmínku. Dosazením $x = 0$ dostaneme

$$u(0,y,z) = F(y+z, y^2+z^2),$$

$$yz = F(y+z, y^2+z^2).$$

Dá se uhodnout, že podmínka bude splněna, pokud $F(s,t) = \dfrac{1}{2}(s^2 - t)$, neboli

$$u(x,y,z) = \frac{1}{2}\left((x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)\right),$$

$$u(x,y,z) = xy + yz + xz.$$

O správnosti se můžeme přesvědčit přímým výpočtem. □

Věta 11.6 *Nechť funkce a, b, c mají spojité parciální derivace v oblasti $D \in \mathbb{R}^3$. Jestliže křivka Θ s parametrickým vyjádřením*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in (\alpha, \beta),$$

leží v oblasti D, její průmět do roviny $0xy$ označíme τ a ještě platí, že pro všechna $t \in (\alpha, \beta)$ je

$$\begin{vmatrix} a\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right) & b\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Potom existuje v rovině $0xy$ oblast G obsahující křivku τ taková, že řešení $z = z(x,y)$ rovnice (11.6) je v G jednoznačné.

Věta má opět pouze lokální charakter.
Obvykle se charakteristiky rovnice (11.8) nazývají i charakteristikami rovnice (11.6). Potom platí následující věta.

Věta 11.7 *Nechť je plocha*

$$z = f(x,y) \tag{11.9}$$

tvořena charakteristikami rovnice (11.6) a nechť funkce $f(x,y)$ má spojité parciální derivace. Potom je $f(x,y)$ řešením rovnice (11.6). Obráceně - jestliže funkce $f(x,y)$ je řešením rovnice (11.6), potom každá charakteristika, která má s $f(x,y)$ aspoň jeden společný bod, leží celá na ploše (11.9).

Příklad 11.8 *Najděte řešení Cauchyovy úlohy*

$$z(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} - y(y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$z = \sqrt{y} \qquad \textit{pro } x = 1.$$

Řešení: Sestavíme si charakteristickou soustavu, která má tvar

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= z(x+z),\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -y(y+z),\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= 0.\end{aligned}$$

V dané rovnici se nevyskytuje parciální derivace podle z, proto je derivace z podle t rovna nule. Integrací poslední rovnice dostaneme

$$z = A, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme do zbývajících rovnic a dostaneme dvě obyčejné diferenciální rovnice, které už umíme řešit. Pro první rovnici máme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(x+A),$$

integrací dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{x+A} &= A\mathrm{d}t,\\ \ln{(x+A)} &= At + \ln B, \quad B \in \mathbb{R},\\ x &= B\mathrm{e}^{At} - A.\end{aligned}$$

Druhá rovnice nám dává

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -y(y+A),\\ \frac{\mathrm{d}y}{-y(y+A)} &= \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Levou stranu rozložíme na parciální zlomky a integrací dostaneme

$$\begin{aligned}-\int\left(\frac{1}{Ay} - \frac{1}{A(A+y)}\right)\mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}t,\\ -\left(\frac{1}{A}\ln y - \frac{1}{A}\ln{(A+y)}\right) &= t + C, \quad C \in \mathbb{R},\\ \ln\left(\frac{A+y}{y}\right) &= At + \ln K,\\ \frac{y+A}{y} &= K\mathrm{e}^{At},\\ y + A &= yK\mathrm{e}^{At},\\ y &= \frac{A}{K\mathrm{e}^{At}-1}.\end{aligned}$$

Označme $K = \dfrac{1}{C}$, potom máme

$$y = \frac{A}{\frac{1}{C}\mathrm{e}^{At} - 1},$$

$$y = \frac{AC}{\mathrm{e}^{At} - C}.$$

Takže jsme získali charakteristiky

$$x = B\mathrm{e}^{At} - A, \quad y = \frac{AC}{\mathrm{e}^{At} - C}, \quad z = A, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Počáteční křivku si vyjádříme parametricky

$$x = 1, \quad y = \xi^2, \quad z = \xi.$$

Najdeme nyní takovém hodnoty A, B, C, aby se charakteristiky a počáteční křivka protínaly. Do rovnice charakteristik dosadíme za x, y, z parametrické vyjádření počáteční křivky a současně volíme $t = 0$.

$$1 = B\mathrm{e}^{A0} - A, \quad \xi^2 = \frac{AC}{\mathrm{e}^{A0} - C}, \quad \xi = A.$$

Po úpravě máme

$$A = \xi, \quad B = 1 + \xi, \quad C = \frac{\xi}{1 + \xi}.$$

Dosazením potom dostaneme

$$x = (1 + \xi)\mathrm{e}^{\xi t} - \xi, \quad y = \frac{\xi^2}{(1 + \xi)\mathrm{e}^{\xi t} - \xi}, \quad z = \xi.$$

Pravá strana vyjádření x je rovna jmenovateli ve vyjádření y a proto

$$xy = \xi^2 \Rightarrow \sqrt{xy} = \xi,$$

z rovnosti pravých stran plyne rovnost levých stran a máme

$$z = \sqrt{xy}.$$

O správnosti se můžeme přesvědčit přímým výpočtem. $\square$

11.4 Pfaffova rovnice.

Definice 11.4 *Pfaffovou rovnicí nazveme výraz*

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0, \tag{11.10}$$

kde P, Q, R jsou funkce proměnných x, y, z definované v oblati D.

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že platí $R \neq 0$ v D. Potom můžeme rovnici (11.10) upravit na tvar

$$\mathrm{d}z = -\frac{P}{R}\mathrm{d}x - \frac{Q}{R}\mathrm{d}y, \tag{11.11}$$

neboli při řešení hledáme takovou funkci $z(x,y)$, jejíž totální diferenciál vyhovuje rovnici (11.11).
Uvedeme si nejdříve geometrický význam Pfaffovy rovnice a jejího řešení:
Trojice funkcí P, Q, R určuje v každém bodě oblasti D vektor = směr. Jestliže

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \tag{11.12}$$

jsou parametrické rovnice trojice funkcí, které splňují rovnici (11.10), potom tečna ke křivce zadané rovnicemi (11.12) je kolmá na směr určený vektorem (P, Q, R). Stačí si jen uvědomit, že rovnice (11.10) představuje skalární součin vektoru (P, Q, R) a tečny (x', y', z').
Analogicky, pokud je $z = h(x,y)$ (obecně je z rovnicí plochy) řešením rovnice (11.11), potom tečná rovina k ploše $z = h(x,y)$ je kolmá ke směru určenému vektorem (P, Q, R).
Takže při řešení Pfaffovy rovnice hledáme křivku, nebo plochu, která je kolmá ke směru určenému vektorem (P, Q, R).

Věta 11.8 *Je-li rovnice (11.10) řešitelná v D a jestliže mají funkce P, Q, R spojité parciální derivace, potom v D platí*

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0. \tag{11.13}$$

Podmínce (11.13) se říká podmínka řešitelnosti a nebo podmínka integrability Pfaffovy rovnice.

Věta 11.9 *Jestliže mají v D funkce P, Q, R spojité parciální derivace a v každém bodě D je splněna podmínka (11.13), potom v D existují funkce $\mu = \mu(x,y,z) \neq 0$ a $F(x,y,z)$ takové, že platí*

$$\mathrm{d}F = \mu(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z),$$

neboli

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \mu Q, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \mu R.$$

Věta má pouze lokální platnost.
Funkce μ se nazývá *integrační faktor*.

Příklad 11.9 *Mějme rovnici*

$$y^2\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + xy^2z\mathrm{d}z = 0.$$

Podmínka řešitelnosti (11.13) má tvar

$$-2xy^3z + xy^2z + xy^2z(2y-1) = 0.$$

v tomto případě lze integrační faktor „uhádnout“. Jestliže vezmeme $\mu = \dfrac{1}{xy^2}$, *potom pro* $x > 0, y > 0$ *máme*

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x + \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = 0.$$

Levá strana je úplným diferenciálem funkce

$$F = \ln x - \frac{1}{y} + \frac{z^2}{2}.$$

Věta 11.10 *Jestliže mají v* D *funkce* P, Q, R *spojité parciální derivace,* $R \neq 0$ *v* D *a v každém bodě* D *je splněna podmínka* (11.13). *Potom každým bodem* D *prochází právě jedno řešení rovnice* (11.10).

Věta má opět pouze lokální charakter.

Definice 11.5 *Pfaffova rovnice se separovanými proměnnými má tvar*

$$P_1(x)P_2(y)P_3(z)\mathrm{d}x + Q_1(x)Q_2(y)P_3(z)\mathrm{d}y + P_2(y)Q_1(x)R(z)\mathrm{d}z = 0, \tag{11.14}$$

přičemž P_i, Q_j, R *jsou spojité v* D *a* $P_2(y)P_3(z)Q_1(x) \neq 0$.

Příklad 11.10 *Najděte integrační faktor pro rovnici* (11.14).

Řešení: Mějme rovnici (11.14). Vydělíme ji součinem $P_2(y)P_3(z)Q_1(x)$ a dostaneme

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\mathrm{d}x + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\mathrm{d}y + \frac{R(z)}{P_3(z)}\mathrm{d}z = 0.$$

Po této úpravě je koeficient u dx pouze fukcí x, koeficient u dy pouze fukcí y a koeficient u dz pouze fukcí z. Integrací levé strany dostaneme řešení

$$\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\mathrm{d}x + \int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\mathrm{d}y + \int \frac{R(z)}{P_3(z)}\mathrm{d}z = 0.$$

Integračním faktorem pro rovnici (11.14) je proto $\dfrac{1}{P_2(y)P_3(z)Q_1(x)}$. □

Příklad 11.11 *Určete řešení rovnice*

$$Ay^2z^2\mathrm{d}x + Bz^2x^2\mathrm{d}y + Cx^2y^2\mathrm{d}z = 0,$$

v oblasti $x > 0, y > 0, z > 0$, *kde* A, B, C *jsou kladné konstanty.*

Řešení: Separujeme si proměnné - vydělíme rovnici výrazem $x^2y^2z^2$ a dostaneme

$$\frac{A}{x^2}dx + \frac{B}{y^2}dy + \frac{C}{z^2}dz = 0.$$

Integrací levé strany dostaneme řešení

$$-\frac{A}{x} - \frac{B}{y} - \frac{C}{z} = -k,$$

neboli

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{y} + \frac{C}{z} = k,$$

kde k je nějaká kladná konstanta. Ve většině případů pokládáme poslední rovnici za řešení naší úlohy. Je sice možné prohlásit některou z proměnných za závisle proměnnou a vyjádřit ji pomocí zbývajících. Tento postup ale nelze použít vždy. Závisí to na tvaru řešení. V našem případě pokud prohlásíme za neznámou funkci z, tak dostaneme

$$z = \frac{1}{C\left(k - \frac{A}{x} - \frac{b}{y}\right)}.$$

□

Řešení Pfaffovy rovnice lze snadno najít v případě, že rovnice (11.10) má tvar

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(z)dz = 0, \tag{11.15}$$

neboli jestliže máme separovanou proměnnou z. Podmínka (11.15) má potom tvar

$$R(z)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

Protože většinou máme i požadavek, že $R(z) \neq 0$, můžeme podmínku zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

neboli

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{11.16}$$

Jestliže navíc mají funkce P, Q spojité parciální derivace, potom rovnice (11.16) je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby výraz

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

byl totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x,y)$. Rovnici (11.15) můžeme potom zapsat ve tvaru

$$\mathrm{d}F(x,y) + R(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Jejím řešením potom bude funkce

$$F(x,y) + \int R(z)\mathrm{d}z.$$

Příklad 11.12 *Určete řešení, pokud existuje, rovnice*

$$y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = 0.$$

Řešení: Máme $P = y, Q = x, R = z$. Podmínka řešitelnosti má tvar

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = z(1-1) = z \cdot 0 = 0.$$

Rovnice je řešitelná a podle předchozího je její řešení ve tvaru

$$F(x,y) + \int R(z)\mathrm{d}z,$$

$$F(x,y) + \frac{z^2}{2}.$$

Najdeme si funkci F stejným postupem jako při řešení exaktní rovnice. Protože platí

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y,$$

je

$$F = xy + \varphi(y).$$

Současně musí platit

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x,$$

takže po dosazení máme

$$x + \varphi'(y) = x,$$

$$\varphi'(y) = 0,$$

$$\varphi(y) = C.$$

Takže jsme dostali

$$F(x,y) = xy + C$$

a řešení naší rovnice je funkce

$$xy + \frac{z^2}{2} + C.$$

□

11.5 Shrnutí kapitoly

Seznámili jsme se s další částí teorie parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu. Ukázali jsme si, jak pomocí charakteristického systému můžeme získat obecné řešení. Naučili jsme se řešit Pfaffovu rovnici.
Všechny pojmy byly důsledně ilustrovány na příkladech.

11.6 Řešené příklady

Příklad 11.13 *Najděte integrační faktor pro rovnici (11.14).*

Řešení: Mějme rovnici (11.14). Vydělíme ji součinem $P_2(y)P_3(z)Q_1(x)$ a dostaneme

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\mathrm{d}x + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\mathrm{d}y + \frac{R(z)}{P_3(z)}\mathrm{d}z = 0.$$

Po této úpravě je koeficient u dx pouze fukcí x, koeficient u dy pouze fukcí y a koeficient u dz pouze fukcí z. Integrací levé strany dostaneme řešení

$$\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\mathrm{d}x + \int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\mathrm{d}y + \int \frac{R(z)}{P_3(z)}\mathrm{d}z = 0.$$

Integračním faktorem pro rovnici (11.14) je proto $\dfrac{1}{P_2(y)P_3(z)Q_1(x)}$. □

Příklad 11.14 *Určete řešení rovnice*

$$Ay^2z^2\mathrm{d}x + Bz^2x^2\mathrm{d}y + Cx^2y^2\mathrm{d}z = 0,$$

v oblasti $x > 0, y > 0, z > 0$, kde A, B, C jsou kladné konstanty.

Řešení: Separujeme si proměnné - vydělíme rovnici výrazem $x^2y^2z^2$ a dostaneme

$$\frac{A}{x^2}dx + \frac{B}{y^2}dy + \frac{C}{z^2}dz = 0.$$

Integrací levé strany dostaneme řešení

$$-\frac{A}{x} - \frac{B}{y} - \frac{C}{z} = -k,$$

neboli

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{y} + \frac{C}{z} = k,$$

kde k je nějaká kladná konstanta. Ve většině případů pokládáme poslední rovnici za řešení naší úlohy. Je sice možné prohlásit některou z proměnných za závisle proměnnou a vyjádřit ji pomocí zbývajících. Tento postup ale nelze použít vždy. Závisí to na tvaru řešení. V našem případě pokud prohlásíme za neznámou funkci z, tak dostaneme

$$z = \frac{1}{C\left(k - \frac{A}{x} - \frac{b}{y}\right)}.$$

□

Příklad 11.15 *Určete řešení, pokud existuje, rovnice*

$$y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = 0.$$

Řešení: Máme $P = y, Q = x, R = z$. Podmínka řešitelnosti má tvar

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = z(1-1) = z \cdot 0 = 0.$$

Rovnice je řešitelná a podle předchozího je její řešení ve tvaru

$$F(x, y) + \int R(z)\mathrm{d}z,$$

$$F(x, y) + \frac{z^2}{2}.$$

Najdeme si funkci F stejným postupem jako při řešení exaktní rovnice. Protože platí

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y,$$

je

$$F = xy + \varphi(y).$$

Současně musí platit

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x,$$

takže po dosazení máme

$$x + \varphi'(y) = x,$$

$$\varphi'(y) = 0,$$

$$\varphi(y) = C.$$

Takže jsme dostali

$$F(x, y) = xy + C$$

a řešení naší rovnice je funkce

$$xy + \frac{z^2}{2} + C.$$

□

11.7 Cvičení

Příklad 5 *Najděte obecné řešení rovnice*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Řešení. Obecné řešení má tvar

$$z = x\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

kde ψ je libovolná diferencovatelná funkce.

Příklad 6 *Najděte obecné řešení rovnice*

$$(x^2 + y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Řešení. Obecné řešení má tvar

$$z = \psi\left(\frac{y}{x^2 - y^2}\right),$$

kde ψ je libovolná diferencovatelná funkce.

Příklad 7 *Najděte řešení rovnice*

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = -2xy,$$

procházející kružnicí $x^2 + y^2 = 16,\ z = 3.$

Řešení. Řešení dané úlohy je kulovou plochou

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

12 Parciální diferenciální rovnice druhého řádu

12.1 Cíl kapitoly

V předchozích dvou kapitolách jsme se zabývali parciálními diferenciálními rovncemi prvního řádu a jejich vlastnostmi.
Řada technických problémů, zvláště v elektrotechnice, se dá popsat pomocí parciálních diferenciálníc rovnic druhého řádu. Proto se jimi teď budeme věnovat samostatně.
Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s pojmy o parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu.
Hlavní pozornost budeme věnovat lineárním parciálním diferenciálním rovnicím druhého řádu. Připomeneme si klasifikaci lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu na rovnice eliptické, parabolické a hyperbolické. Dále si uvedeme větu o transformaci, která nám zajišťuje, že každou lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu můžeme lokální transformací převést na kanonický tvar. Ukážeme si způsoby provedení transformace pro různé typy rovnic.

12.2 Klasifikace rovnic na hyperbolické, parabolické a eliptické)

Definice 12.1 *Parciální diferenciální rovnicí druhého řádu dvou proměnných rozumíme rovnici*

$$F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\right) = 0.$$

Definice 12.2 *Parciální diferenciální rovnicí druhého řádu tří proměnných rozumíme rovnici*

$$F\left(x, y, z, u(x,y,z), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0.$$

Příklad 12.1 *Parciální diferenciální rovnice druhého řádu se často používají při popisu fyzikálních a technických dějů a procesů. Následují některé parciální rovnice, které se používají v elektrotechnice a příbuzných oborech.*

$$\triangle u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \textit{Laplaceova rovnice (elektrostatické pole)},$$

$$\triangle u = f \quad \textit{Poissonova rovnice (elektrostatické pole s volnými náboji)},$$

$$\triangle u = a^2 u \quad \textit{Helmholzova rovnice (stacionární vlnová rovnice)},$$

$$\triangle u = a\frac{\partial u}{\partial t} \quad \textit{difusní rovnice },$$

$$\triangle u = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \textit{vlnová rovnice (šíření elektromagnetických vln)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -J, \quad v = v\left(|\ \textit{grad}\ u|\right) \quad \textit{rovinné stacionární magnetické pole},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \textit{rovnice pro kmity struny,}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \textit{rovnice vedení tepla.}$$

Definice 12.3 *Kvazilineární parciální diferenciální rovnicí druhého řádu dvou proměnných rozumíme rovnici*

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K = 0, \tag{12.1}$$

kde funkce A, B, C, K *jsou funkcemi* $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

Definice 12.4 *Lineární parciální diferenciální rovnicí druhého řádu dvou proměnných rozumíme rovnici*

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + g(x,y)u = f(x,y). \tag{12.2}$$

Funkce a, b, c, d, e, g, f *jsou spojité v oblasti* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, *přičemž aspoň jedna z funkcí* a, b, c *je nenulová v každém bodě* $(x, y) \in \Omega$.
Řešením rovnice (12.1) *v oblasti* Ω *rozumíme každou funkci* $u(x, y) \in C^2(\Omega)$, *která v* Ω *identicky splňuje* (12.1).
Označme $D = b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y)$, *potom jestliže*
$D < 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$ *pak se jedná o eliptický typ,*
$D = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$ *pak se jedná o parabolický typ,*
$D > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$ *pak se jedná o hyperbolický typ.*
Ve zbývajících případech mluvíme o smíšeném typu.

Příklad 12.2 *Rovnice*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

je eliptického typu,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

je hyperbolického typu,

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

je parabolického typu.

Určení typu někdy záleží na oblasti, ve které je funkce definovaná.

Příklad 12.3 *Rovnice*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

je eliptického typu pro všechny body horní poloroviny, tj. $y > 0$, *je hyperbolického typu v dolní polorovině, tj.* $y < 0$ *a je parabolického typu v bodech osy* x, *t.j.* $y = 0$.

Příklad 12.4 *Mějme rovnici kvazistacionárního elektromagnetického pole*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\gamma(x,y)-J,\quad v=v\left(|\ \mathit{grad}\ u|\right).$$

Tato rovnice je v elektricky vodivých podoblastech parabolického typu, protože v těchto podoblastech je elektrická vodivost $\gamma(x,y)$ kladná, zatímco v nevodivých podoblastech je elektrická vodivost nulová a proto se v nich jedná o eliptický typ.

12.3 Transformace proměnných.

Věta 12.1 *Každou lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu dvou proměnných, eliptickou, nebo hyperbolickou, nebo parabolickou, lze vhodnou lokální transformací souřadnic převést v okolí každého bodu $(x_0,y_0)\in\Omega$ na kanonický tvar. T.j. u rovnice eliptického typu na tvar*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c_1(x,y)u=f_1(x,y),$$

u rovnice hyperbolického typu na tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c_2(x,y)u=f_2(x,y)$$

a u rovnice parabolického typu na tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_3(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b_3(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c_3(x,y)u=f_3(x,y),\ a_3(x,y)\neq 0.$$

Mějme nyní lineární rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Gu=F, \tag{12.3}$$

kde $|A|+|B|+|C|\neq 0$. Dané rovnici přiřadíme charakteristickou rovnici

$$A(\mathrm{d}y)^2-B\mathrm{d}x\mathrm{d}y+C(\mathrm{d}x)^2=0. \tag{12.4}$$

Řešením charakteristické rovnice bude každá dvojice funkcí

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad t\in(\alpha,\beta), \tag{12.5}$$

která vyhovuje dané rovnici. Přitom za dx dosadíme výraz $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$ a za dy dosadíme výraz $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$ a nakonec celou rovnici vydělíme výrazem $(\mathrm{d}t)^2$.

Definice 12.5 *Jestliže jsou funkce $x(t)=\varphi(t)$, $y(t)=\psi(t)$ řešením rovnice (12.4) a jestliže jsou rovnice (12.5) parametrickými rovnicemi hladké křivky, potom tuto křivku nazveme charakteristikou.*

Příklad 12.5 *Najděte charakteristiky rovnice*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Řešení: Naší rovnici přířadíme charakteristickou rovnici:

$$(\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}x)^2 = 0,$$

neboli

$$(\mathrm{d}y)^2 = (\mathrm{d}x)^2 \implies \frac{(\mathrm{d}y)^2}{(\mathrm{d}x)^2} = 1,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm 1.$$

Charakteristikami naší rovnice jsou potom přímky $y = x + P$ a $y = -x + P$, kde $P \in \mathbb{R}$. Máme tak dvě třídy přímek a každým bodem roviny Oxy prochází právě jedna přímka z každé třídy. $\square$

Příklad 12.6 *Najděte charakteristiky pro rovnici vedení tepla*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Řešení: Rovnici přířadíme charakteristickou rovnici:

$$(\mathrm{d}t)^2 = 0,$$

neboli

$$(\mathrm{d}t) = 0, \Longrightarrow t = P, \quad P \in \mathbb{R}.$$

Rovnice vedení tepla má charakteristiky množinu přímek $t =$ konst. $\square$

Příklad 12.7 *Najděte charakteristiky Laplaceovy rovnice*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Řešení: Laplaceově rovnici přířadíme charakteristickou rovnici:

$$(\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}x)^2 = 0.$$

Součet dvou nezáporných hodnot je roven nule tehdy a jen tehdy, pokud obě hodnoty jsou současně nulové, takže máme

$$(\mathrm{d}y) = 0, \Longrightarrow y = P, \quad (\mathrm{d}x) = 0, \Longrightarrow x = R, \quad P, R \in \mathbb{R}.$$

Vztahy $x = R, y = P$, ale nepopisují žádnou křivku, proto Laplaceova rovnice nená žádnou charakteristiku. $\square$

Z výše uvedených příkladů plyne, že že každým bodem (x, y) může procházet právě jedna charakteristika, nebo charakteristik může být více a nebo nemusí existovat žádná.
Ukážeme si použití charakteristik při převodu lineární rovnice (12.3) na kanonický tvar. Nechť máme rovnici hyperbolického typu, tj. $B^2 - 4AC > 0$. Bez omezení obecnosti můžeme předpoklídat, že $A \neq 0$. Charakteristickou rovnici

$$A(\mathrm{d}y)^2 - B\mathrm{d}x\mathrm{d}y + C(\mathrm{d}x)^2 = 0.$$

si upravíme na tvar

$$A\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - B\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + C = 0.$$

Označme $\lambda = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Potom hledáme řešení rovnice

$$A\lambda^2 - B\lambda + C = 0.$$

Vzhledem k podmínce $B^2 - 4AC > 0$, máme, že naše kvadratická rovnice bude mít řešením dvě různá reálná čísla. Označme je $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lambda_1,$$

$$\mathrm{d}y = \lambda_1 \mathrm{d}x,$$

$$y = \lambda_1 x + \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

A analogicky

$$y = \lambda_2 x + \eta, \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

Tím jsme zjistili, že charakteristikami jsou dvě třídy přímek

$$y = \lambda_1 x + \xi, \quad y = \lambda_2 x + \eta.$$

Každým bodem prochází právě jedna přímka z každé třídy. Jinak řečeno, známe-li bod (x, y), potom známe i čísla ξ, η a naopak známe-li čísla ξ, η, známe i souřadnice průsečíku charakteristik

$$x = \frac{\xi - \eta}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad y = \frac{\lambda_2 \xi - \lambda_1 \eta}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

a naopak

$$\xi = y - \lambda_1 x, \quad \eta = y - \lambda_2 x.$$

Můžeme tak každou funkci proměnných x, y považovat za funkci proměnných ξ, η. Přitom platí

$$u(x, y) = u\left(\frac{\xi - \eta}{\lambda_2 - \lambda_1}, \frac{\lambda_2 \xi - \lambda_1 \eta}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) = U(\xi, \eta).$$

A naopak

$$U(\xi, \eta) = U(y - \lambda_1 x, y - \lambda_2 x) = u(x, y).$$

Budeme hledat rovnici, kterou splňuje funkce U, jestliže funkce u je řešením rovnice (12.3). Určíme si derivace

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\lambda_1 \frac{\partial U}{\partial \xi} - \lambda_2 \frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\lambda_1\lambda_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\lambda_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \lambda_2 \frac{\partial^U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}.$$

Dosadíme tyto hodnoty do rovnice (12.3) a dostaneme

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Gu - F = 0,$$

$$A \left(\lambda_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\lambda_1\lambda_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) + B \left(-\lambda_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \lambda_2 \frac{\partial^U}{\partial \eta^2} \right) +$$
$$C \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) + \cdots = 0,$$

pro přehlednost zde uvádíme pouze parciální derivace druhého řádu, které jsou rozhodující, totéž i dále,

$$(A\lambda_1^2 - B\lambda_1 + C) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + (2A\lambda_1\lambda_2 - B(\lambda_1 + \lambda_2) + 2C) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + (A\lambda_2^2 - B\lambda_2 + C) \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \cdots = 0.$$

Čísla λ_1, λ_2 jsme získali jako kořeny kvadratické rovnice. Proto platí

$$A\lambda_i^2 - B\lambda_i + C = 0, \quad i = 1, 2,$$

proto jsou koeficienty u druhých derivací podle x, y nulové.
Navíc u kvadratické rovnice platí, podle Vietových vzorců, že součin jejich dvou kořenů je roven absolutnímu členu, dělenému koeficientem u nejvýšší mocniny a jejich součet, záporně vzatý, je roven koeficientu u první mocniny, dělenému koeficientem u nejvyšší mocniny, takže

$$2A\lambda_1\lambda_2 - B(\lambda_1 + \lambda_2) + 2C = 2A\frac{C}{A} - B\frac{B}{A} + 2C = \frac{1}{A}(4AC - B^2) \neq 0.$$

Proto bude koeficient u smíšené derivace nenulový a můžeme jim dělit celou rovnici. Takže jsme dostali

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \cdots = 0.$$

Máme nyní naši rovnici v kanonickém tvaru, který se používá pro určení řešení. Skutečně, jestliže nyní provedeme substituci

$$\xi = r + s, \quad \eta = r - s,$$

zpočítáme si příslušné parciální derivace, $U(\xi, \eta) = V(r, s)$,

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial V}{\partial s} \cdot \frac{21}{2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial s} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 V}{\partial s \partial r} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}.$$

Dosazením dostaneme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \cdots = 0.$$

Tím jsme opět získali kanonický tvar pro rovnici hyperbolického typu.

Mějme nyní rovnici (12.3) jako rovnici parabolického typu, tj. platí $4AC - B^2 = 0$. Opět budeme předpokládat, že platí $A \neq 0$. V opačném případě provedeme přeznačení proměnných. Charakteristická rovnice

$$A\lambda^2 - B\lambda + C = 0$$

má potom jeden dvojnásobný kořen $\lambda = \dfrac{B}{2A}$. Budeme dále předpokládat, že $B \neq 0$. Protože pokud je $B = 0$, potom z charakteristické rovnice plyne, že i $C = 0$, o A jsme už dříve předpokládali, že je nenulové. Rovnice (12.3) by pak byla tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots = 0,$$

a tedy už je přímo v kanonickém tvaru. Opět jsme uvedli pouze parciální derivace druhého řádu.
Jestliže je $B \neq 0$, potom je také $\lambda \neq 0$. Obdobně jako v předchozím případě položíme

$$\xi = y - \lambda x.$$

Protože máme pouze jeden kořen charakteristické rovnice, položíme dále $\eta = x$. Máme tedy $U(\xi, \eta) = u(\eta, \xi + \lambda x)$. Spočítáme si parciální derivace.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.$$

Dosadíme tyto hodnoty do naší rovnice (12.3) a dostaneme

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Gu - F = 0,$$
$$A\left(\lambda^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2\lambda\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right) + B\left(-\lambda\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\right) + C\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right) + \cdots = 0,$$

(pro přehlednost opět uvádíme pouze parciální derivace druhého řádu, které jsou rozhodující). Po úpravě dostaneme

$$(A\lambda^2 - B\lambda + C)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + (-2\lambda A + B)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + A\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \cdots = 0.$$

Z charakteristické rovnice nám plyne $A\lambda^2 - B\lambda + C = 0$ a z jejího řešení $\lambda = \dfrac{B}{2A}$ plyne platnost rovnice $B - 2A\lambda = 0 \Rightarrow -2A\lambda + B = 0$. První dva koeficienty v předešlé rovnici jsou proto nulové. Protože navíc jsme předpokládali, že $A \neq 0$, můžeme rovnici vydělit koeficientem A a dostali jsme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \cdots = 0.$$

Tím jsme získali kanonický tvar pro rovnici parabolického typu.
Postup si opět ukážeme na příkladu.

Příklad 12.8 *Převeďte na kanonický tvar rovnici*

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

a najděte její řešení.

Řešení: Máme $A = 4, B = 4, C = 1$. Takže platí

$$B^2 - 4AC = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0.$$

Rovnice je parabolického typu. Rovnici přiřadíme její charakteristickou rovnici:

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

a určíme si její kořeny. Dostaneme

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}.$$

Podle předchozího volíme

$$\xi = y - \frac{1}{2}x, \quad \eta = x.$$

Určíme si parciální derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.$$

Po dosazení dostaneme

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$4\left(\frac{1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right) + 4\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 4\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 4\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0,$$

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0.$$

Budeme nyní hledat řešení této rovnice. Protože druhé derivace U podle η je nulová, potom integrací dostaneme

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \int \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \mathrm{d}\eta = f(\xi),$$

$$U = \int f(\xi) \mathrm{d}\eta = \eta f(\xi) + g(\xi),$$

kde f, g jsou funkce se spojitými parciálními derivacemi. Dosazením za ξ, η dostaneme řešení naší rovnice ve tvaru

$$u = x f(y - \frac{1}{2}x) + g(y - \frac{1}{2}x).$$

□

Mějme nyní rovnici (12.3) eliptického typu, tj. platí $B^2 - 4AC < 0$. Přímo z této pdmínky nám vyplývá, že $A \neq 0, C \neq 0$. Charakteristická rovnice

$$A\lambda^2 - B\lambda + C = 0$$

má dva komplexní kořeny $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \beta \neq 0$.
Položíme

$$\xi = y - \alpha x, \quad \eta = -\beta x.$$

Spočítáme si parciální derivace pro funkci $u(x,y) = U(\xi,\eta) = u\left(\frac{\eta}{-\beta}, \xi - \frac{\alpha}{\beta}\eta\right)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha\frac{\partial U}{\partial \xi} - \beta\frac{\partial U}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial\eta} + \beta^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.$$

Dosadíme tyto hodnoty do naší rovnice (12.3) a dostaneme

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Gu - F = 0,$$
$$A\left(\alpha^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial\eta} + \beta^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right) + B\left(\alpha^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial\eta} + \beta^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right) + C\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right) + \cdots = 0,$$

(pro přehlednost opět uvádíme pouze parciální derivace druhého řádu, které jsou rozhodující). Po úpravě dostaneme

$$(\alpha^2 A - \alpha B + C)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \beta(2\alpha A - B)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial\eta} + A\beta^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \cdots = 0.$$

$\alpha + i\beta$ je kořen charakteristické rovnice a proto platí

$$\alpha = \frac{B}{2A}, \quad \beta^2 = \frac{4AC - B^2}{4A^2}.$$

Potom ale

$$2\alpha A - B = 0$$

a

$$\alpha^2 A - \alpha B + C = \frac{B^2}{4A^2}A - \frac{B}{2A}B + C = \frac{B^2}{4A} - \frac{B^2}{2A} + C =$$
$$\frac{-B^2 + 4AC}{4A} = A\beta^2.$$

Neboli koeficient u míšené derivace je nulový a koeficinty u zbývajících se sobě rovnají. Tím jsme získali rovnici

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \cdots = 0,$$

která je kanonickým tvarem pro rovnici eliptického typu. Pokud jsou koeficienty rovnice (12.3) funkcemi, potom postupujeme analogicky. Musíme pouze rozlišit oblasti ve kterých je rovnice stejného typu.

Definice 12.6 *Okrajová úloha pro lineární parciální diferenciální rovnici 2.řádu je: Najít řešení $u = u(x,y)$ rovnice (12.1) v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, jestliže známe hodnoty řešení na hranici $\Gamma(\Omega)$.*

$$u(x,y)|_{(x,y)\in\Gamma} = \varphi(x,y).$$

12.4 Shrnutí kapitoly

Připomenuli jsme si základní pojmy pro parciální diferenciální rovnice druhého řádu. Soustředili jsme se hlavně na lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu. Byla provedena klasifikace lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Naučili jsme se rozlišovat rovnice na eliptické, parabolické a hyperbolické.
Uvedli jsme si větu o transformaci, která nám zajišťuje, že každou lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu lze lokální transformací převést na kanonický tvar a ukázali jsme si konkrétní postup při transformaci.

12.5 Řešené příklady

Příklad 12.9 *Najděte kanonický tvar rovnice*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 15\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

a její řešení.

Řešení: Máme $A = 1, B = 8, C = 15$. Takže platí

$$B^2 - 4AC = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0.$$

Rovnice je hyperbolického typu. Rovnici přiřadíme charakteristickou rovnici:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

a určíme si její kořeny. Dostaneme

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 5.$$

Podle předchozího volíme

$$\xi = y - 3x, \quad \eta = y - 5x.$$

Určíme si parciální derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 30\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 25\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 8\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - 5\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}.$$

Po dosazení dostaneme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Budeme nyní hledat řešení této rovnice. Zvolme

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = v.$$

Potom

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0,$$

a proto je $v = f(\eta)$, kde f je libovolná funkce. Takže máme

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = f(\eta),$$

$$U = \int f(\eta)\mathrm{d}\eta = F(\eta) + G(\xi),$$

kde F, G jsou funkce se spojitými parciálními derivacemi. Dosazením za ξ, η dostaneme řešení naší rovnice ve tvaru

$$u = F(y - 5x) + G(y - 3x).$$

□

Příklad 12.10 *Převeďte na kanonický tvar rovnici*

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 13\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Řešení: Máme $A = 4, B = 12, C = 13$. Takže platí

$$B^2 - 4AC = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 13 = 144 - 208 = -64.$$

Rovnice je eliptického typu. Rovnici přiřadíme její charakteristickou rovnici:

$$4\lambda^2 - 12\lambda + 13 = 0$$

a určíme si její kořeny. Dostaneme

$$\lambda_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 4 \cdot 13}}{8} = \frac{12 \pm \sqrt{-64}}{8} = \frac{3}{2} \pm i.$$

Máme $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = 1$. Podle předchozího volíme

$$\xi = y - \frac{3}{2}x, \quad \eta = -x.$$

Určíme si parciální derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{9}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 3\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{3}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.$$

Po dosazení dostaneme

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 13\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$4\left(\frac{9}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 3\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right) + 12\left(-\frac{3}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\right) + 13\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right) = 0,$$

$$9\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 12\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 4\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - 18\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 12\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 13\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right) = 0,$$

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0,$$

□

12.6 Cvičení

Příklad 8 *Najděte kanonický tvar rovnice*

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Řešení. Kanonickým tvarem dané rovnice je rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Příklad 9 *Najděte kanonický tvar rovnice*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Řešení. Kanonickým tvarem dané rovnice je rovnice

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 \xi} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 \eta} = 0.$$

13 Vlnová rovnice a D'Alembertův vzorec

13.1 Cíl kapitoly

Budeme pokračovat ve studiu parciálních rovnic druhého řádu.
Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s vlnovou rovnicí a jedním ze způsobů nalezení jejího řešení. Vlnová rovnice je rovnicí hyperbolického typu.
Uvedeme si tvary okrajových a počátečních podmínek, které se používají pro popis kmitů struny a které potřebujeme je pro nalezení jednoznačného řešení dané úlohy.
Odvodíme si d'Alembertův vzorec, který nám popisuje jednu z možností, jak získat řešení.
Řešení rovnice vedení tepla budeme hledat Fourierovou metodou separace proměnných.
V některých úlohách je potřeba rozvinout do Fourierových řad počáteční nebo okrajové podmínky. Proto je připojeno stručné zopakování některých poznatků o konstrukci Fourierových řad.

13.2 Fourieriovy řady

13.2.1 Fourierova řada a Fourierova transformace

Definice 13.1 *Předpokládejme, že f je funkce definovaná na intervalu $[-\pi, \pi]$ a že pro tuto funkci existují všechny níže uvedené integrály. Čísla*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x,\ \ n = 0, 1, 2, \dots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x,\ \ n = 1, 2, 3, \dots$$

se nazývají **Fourierovy koeficienty** *funkce $f(x)$. Řada*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

se nazývá **Fourierova řada** *funkce $f(x)$.*

13.2.2 Dirichletovy podmínky

Definice 13.2 *Funkce $f(x)$ splňuje na intervalu $[-\pi, \pi]$* **Dirichletovy podmínky**, *jestliže má na intervalu $[-\pi, \pi]$ konečný počet maxim a minim a jestliže je na tomto intervalu spojitá s výjimkou konečného počtu bodů nespojitosti prvního druhu.*

Někdy jsou Dirichletovy podmínky formulovány také takto:

Definice 13.3 *Funkce $f(x)$ splňuje na intervalu $[-\pi, \pi]$* **Dirichletovy podmínky**, *jestliže lze tento interval rozdělit na konečný počet subintervalů takových, že uvnitř každého z nich je $f(x)$ monotonní a ohraničená.*

Poznámka 13.1 *Analogicky můžeme formulovat Dirichletovy podmínky pro libovolný interval $[a, b]$.*

13.2.3 Dirichletova věta

Věta 13.1 *Jestliže funkce $f(x)$ splňuje Dirichletovy podmínky, pak v každém bodě intervalu $[-\pi, \pi]$ Fourierova řada konverguje a platí*

$$\frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right]=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

a v obou krajních bodech intervalu $[-\pi, \pi]$ je součet Fourierovy řady roven

$$\frac{1}{2}\left[f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right].$$

13.2.4 Rozvoj sudých a lichých funkcí do Fourierovy řady

A) Případ sudé funkce $f(x)$

V této situaci jsou funkce $f(x)\sin nx$, $n=1,2,\ldots$ liché, a tedy $b_n=0$. Fourierova řada má proto tvar

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

kde

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$

protože $f(x)\cos nx$ je sudá funkce.

B) Případ liché funkce $f(x)$

V tomto případě jsou funkce $f(x)\cos nx$, $n=1,2,\ldots$ liché, a proto $a_n=0$. Tudíž Fourierova řada bude

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

kde

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,$$

protože $f(x)\sin nx$ je sudá funkce.

13.2.5 Rozvoj funkce s libovolnou periodou

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu $[-l, l]$, kde $l>0$. Fourierova řada pak má tvar

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

kde

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\;\; n = 0,1,2,\ldots$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\;\; n = 1,2,3,\ldots.$$

13.2.6 Rozvoj sudé funkce s libovolnou periodou

Je-li funkce $f(x)$ sudá na intervalu $[-l,l]$, kde $l>0$, pak

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\;\; n = 0,1,2,\ldots$$
$$b_n = 0,\;\; n = 1,2,3,\ldots$$

a Fourierova řada má tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}\,.$$

13.2.7 Rozvoj liché funkce s libovolnou periodou

Je-li funkce $f(x)$ lichá na intervalu $[-l,l]$, kde $l>0$, pak

$$a_n = 0,\;\; n = 0,1,2,\ldots$$
$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\;\; n = 1,2,3,\ldots$$

a Fourierova řada má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\,.$$

13.2.8 Rozvoj funkcí do Fourierovy řady na polovičním intervalu

(Metody rozvoje funkcí daných na $[0,a]$)

Uvažujme funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $[0,a]$, $a>0$, a předpokládejme, že ji chceme rozvinout to trigonometrické řady.
Danou funkci $f(x)$ můžeme nějakým způsobem rozšířit i na interval $[-a,0)$. Nová funkce $F(x)$ je pak definovaná na intervalu $[-a,a]$ a s funkcí $f(x)$ se shoduje na intervalu $[0,a]$. Rozvineme-li funkci $F(x)$ do Fourierovy řady na intervalu $[-a,a]$, dostaneme hledanou trigonometrickou řadu reprezentující původní funkci $f(x)$ na intervalu $[0,a]$. Protože rozšíření $f(x)$ na $F(x)$ lze provést libovolným způsobem, takovýchto trigonometrických řad existuje nekonečně mnoho. Některé významné případy nyní rozebereme.

$a-$periodické rozšíření funkce $f(x)$

V tomto případě položíme $2l = a \Longrightarrow l = a/2$ a

$$a_n = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x,$$
$$b_n = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x.$$

Fourierova řada pak je

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{a} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{a}\right).$$

Sudé rozšíření funkce $f(x)$

Nyní položíme $2l = 2a \Longrightarrow l = a$ a

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x,$$
$$b_n = 0.$$

Fourierova řada pak je

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{a}\ .$$

Liché rozšíření funkce $f(x)$

V tomto případě položíme $2l = 2a \Longrightarrow l = a$ a

$$a_n = 0,$$
$$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x.$$

Fourierova řada pak je

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{a}\ .$$

13.2.9 Příklad

Rozviňme do Fourierovy řady funkci

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{for} \quad -\pi \le x < 0, \\ 1, & \text{for} \quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Tato funkce je nespojitá v bodě $x = 0$ a splňuje podmínky Dirichletovy věty. Navíc, protože se jedná o lichou funkci, máme $a_n = 0$. Vypočítejme koeficienty b_n :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx \,\mathrm{d}x = -\frac{2}{n\pi}\cos nx|_0^{\pi} = -\frac{2}{n\pi}(\cos n\pi - 1)\,;$$

$$b_1 = \frac{4}{\pi}\ ,\ b_2 = 0, b_3 = \frac{4}{3\pi}\ ,\ b_4 = 0,\ b_5 = \frac{4}{5\pi}\ ,\ b_6 = 0\,,\ \ldots.$$

Tedy

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \ldots\right].$$

13.2.10 Riemannova věta

Věta 13.2 *Jestliže $f(x)$ splňuje Dirichletovy podmínky, pak:*

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x = 0$$

a

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x = 0.$$

V důsledku této věty pro koeficienty Fourierovy řady a_n, b_n dostáváme:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Ukažme tuto vlastnost na předchozím příkladu. Snadno uvidíme, že

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{-2}{n\pi}(\cos n\pi - 1) = 0$$

a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

13.3 Vlnová rovnice

Často je tato rovnice nazávána též rovnicí pro kmity struny. Mějme ideální strunu zaujímající úsečku na ose x mezi hodnotami $x = 0$ a $x = l$. Jestliže vychýlíme strunu z rovnovážné polohy, začne kmitat. Předpokládejme, že kmitá v jedné rovině Oxy a označme $u(x,t)$ odchylku struny v bodě x a čase t. Rovnici kmitu struny je možno zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{13.1}$$

Pro jednoznačnou řešitelnost musíme ještě požadovat splnitelnost dalších podmínek. Průběh pohybu struny bude jednoznačně určen, pokud budeme znát pohyb koncových bodů a počáteční polohu a rychlost každého bodu. Matematicky to znamená, že potřebujeme znát ještě okrajové a počáteční podmínky.

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \mu_1(t), && (13.2)\\ u(l,t) &= \mu_2(t), && (13.3)\\ u(x,0) &= \varphi(x), && (13.4)\\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= \psi(x). && (13.5) \end{aligned}$$

$\mu_1, \mu_2, \varphi, \psi$ jsou zadané funkce.
Okrajová úloha pro rovnici struny je: Najít řešení $u = u(x,t)$ definovanou pro $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$, která zde má spojité parciální derivace prvního řádu, splňuje podmínky (13.2) - (13.5) a v oblasti $0 < x < l$, $t > 0$ má spojité parciální derivace druhého řádu a splňuje zde rovnici (13.1).
Platí

Věta 13.3 *Okrajová úloha pro rovnici struny má nejvýše jedno řešení.*

13.4 D'Alembertův vzorec

Hledejme nyní řešení rovnice (13.1) vyjádřené pomocí známých funkcí φ, ψ. Rovnici (13.1) přepíšeme na tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

a zavedeme označení

$$v(x,t) := \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{13.6}$$

Potom rovnici (13.1) můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{13.7}$$

Tato rovnice má řešení

$$v(x,t) = a(x-t),$$

kde a je libovolná diferencovatelná funkce. Skutečně,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= a'(x-t),\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -a'(x-t). \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice (13.7) dostaneme

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = a'(x-t) - a'(x-t) = 0.$$

Tím jsme dokázali, že a je řešením rovnice (13.7).

Dosadíme nyní do rovnice (13.6) za $v(x,t)$ funkci $a(x-t)$. Dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = a(x-t).$$

Její řešení je

$$u(x,t) = \int_0^t a(x+(t-s)+s)\mathrm{d}s + b(x+t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(\xi)\mathrm{d}\xi + b(x+t), \tag{13.8}$$

kde je b libovolná dvakrát diferencovatelná funkce.
Protože obě funkce a, b závisí na funkci u a jejích derivacích pouze v čase $t=0$, můžeme je určit z počátečních podmínek

$$\begin{aligned} b(x) =& u(x,0) = \varphi(x), \\ a(x) =& v(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} - \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = \psi(x) - \varphi'(x). \end{aligned}$$

Dosazením hodnot a, b do vztahu (13.8) dostaneme

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} (\psi(\xi) - \varphi'(\xi))\mathrm{d}\xi + \varphi(x+t)$$

a po úpravě

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right). \tag{13.9}$$

Tento vztah se nazývá d'Alembertův vzorec.

Poznámka 13.2 *Z d'Alembertova vzorce (13.9) plyne, že řešení rovnice (13.1) je tvaru*

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$$

pro vhodné funkce F, G. A naopak.
Vhodnou funkcí zde budeme rozumět funkci spojitou a spojitě dvakrát diferencovatelnou podle obou proměnných.

13.5 Fourierova metoda separace proměnných

Při řešení některých parciálních diferentciálních rovnic se používá i metoda separace proměnných (Fourierova metoda, metoda separace proměnných). Základní myšlenkou této metody je, že řešení předpokládáme ve tvaru součinu dvou (respektive tří) funkcí, z nichž každá závisí pouze na jedné nezávislé proměnné. Pokud se nám podaří tímto způsobem separovat jednotlivé proměnné v Laplaceově rovnici, rozpadne se původní parciální rovnice na několik obyčejných diferenciálních rovnic. Umíme-li najít jejich obecná řešení, budeme umět i vyřešit původní Laplaceovu rovnici.

13.6 Fourierova metoda pro vlnovou rovnici

Fourierovu metodu můžeme s úspěchem použít i pro rovnici kmitů struny

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{13.10}$$

kde a je nenulová konstanta. Opět budeme hledat řešení u ve tvaru součinu dvou funkcí, z nichž každá závisí pouze na jedné proměnné:

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t).$$

Dále budeme předpokládat, že platí $X(x) \neq 0, T(t) \neq 0$. Potom má rovnice (13.10) tvaru

$$X''(x)T(t) = \frac{1}{a^2} X(x)T''(t).$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Máme rovnici jejíž levá strana závisí pouze na x a pravá pouze na t. Obě strany rovnice se mohou sobě pouze tehdy, jestliže se obě rovnají jedné a téže konstantě λ. Tedy

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Odtud dostaneme dvojici obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} X''(x) - \lambda X(x) &= 0,\\ T''(t) - a^2\lambda T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Tyto rovnice umíme vyřešit, proto dostáváme i řešení rovnice (13.10). Obvykle nehledáme libovolné řešení, ale takové, které splňuje zadané počáteční a okrajové podmínky. Konkrétní aplikaci této důležité metody uvádíme v části 14.8.

13.7 Vzorce odvozené Fourierovou metodou pro vlnovou rovnici

Předpokládejme, že vlnová rovnice je zadána ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

kde a je nenulová konstanta. Jsou-li dány počáteční podmínky

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

a okrajové podmínky

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \tag{13.11}$$

potom lze najít řešení ve tvaru nekonečné řady

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi a t}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \ , \tag{13.12}$$

kde

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x.$$

Odvození těchto vzorců je podrobně uvedeno níže v příkladu 13.4.

13.8 Shrnutí kapitoly

Věnovali jsme se vlnové rovnici. Ukázali jsme některé její vlastnosti a také okrajové a počáteční podmínky, které se používají při hledání jejího řešení. Odvodili jsme d'Alembertův vzorec pro nalezení jejího řešení.

13.9 Řešené příklady

Příklad 13.1 *Najděte řešení rovnice*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

za předpokladu, že

$$u|_{t=0} = x^2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Řešení: Protože ze zadání příkladu vyplývá $\psi = 0$ dostáváme

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left(\varphi(x+t) + \varphi(x-t) \right),$$

kde $\varphi = x^2$. Proto

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left((x+t)^2 + (x-t)^2 \right).$$

Po úpravě dostáváme

$$u(x,t) = x^2 + t^2.$$

Příklad 13.2 *Najděte profil struny, kmity které jsou popisovány rovnicí*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pro hodnotu času $t = \pi/2$ za předpokladu, že

$$u|_{t=0} = \sin x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 1.$$

Řešení: Dosazením do vztahu (13.9) dostáváme

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+t) + \sin(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \mathrm{d}z\right).$$

Odtud máme

$$u(x,t) = \sin x \cdot \cos t + \frac{1}{2} \cdot z|_{x-t}^{x+t}.$$

Po úpravě dostáváme

$$u(x,t) = \sin x \cdot \cos t + t.$$

Příklad 13.3 *Kmitající struna je upevněna v bodech $x = 0$ a $x = l$, $l > 0$. V počáteční moment měla tvar paraboly*

$$u = \left(\frac{4h}{l^2} \cdot x \cdot (l-x)\right)$$

Najděte profil struny za předpokladu, že platí podmínky (13.11).

Řešení: Využijeme rozklad do řady (13.12). Máme

$$\varphi := \left(\frac{4h}{l^2} \cdot x \cdot (l-x)\right), \quad \text{a} \quad \psi(x) = 0.$$

Najdeme koeficienty ve vzorci (13.12).

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{8h}{l^3}\int_0^l (lx - x^2) \cdot \sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x \\ b_k =& 0. \end{aligned}$$

Abychom vypočetli koeficienty a_k, použijeme dvakrát metodu per partes. Nejprve označme

$$u_1 = lx - x^2, \quad \mathrm{d}u_1 = (l-2x)\mathrm{d}x,$$

$$v_1 = -\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}, \quad \mathrm{d}v_1 = \sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} a_k =& -\frac{8h}{l^3}(lx - x^2)\frac{l}{k\pi} \cdot \cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l \\ &+ \frac{8h}{k\pi l^2}\int_0^l (l-2x) \cdot \cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x \\ =& \frac{8h}{k\pi l^2}\int_0^l (l-2x) \cdot \cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dále označíme

$$u_2 = l - 2x, \quad \mathrm{d}u_2 = -2\mathrm{d}x,$$

$$v_2 = \frac{l}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \mathrm{d}v_2 = \cos \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x.$$

Pokračujeme ve výpočtu:

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{8h}{k^2\pi^2 l}(l-2x) \sin \frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l \\ &+ \frac{16h}{k^2\pi^2 l} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x \\ =& -\frac{16h}{k^3\pi^3} \cos \frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l \\ =& -\frac{16h}{k^3\pi^3}(\cos k\pi - 1) = \frac{16h}{k^3\pi^3}[1-(-1)^k]. \end{aligned}$$

Dosazením a_k a b_k do vztahu (13.12) dostaneme

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16h}{k^3\pi^3} \cdot [1-(-1)^k] \cos \frac{k\pi a t}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}\,.$$

Je-li $k = 2n$, pak platí

$$1-(-1)^k = 0$$

a v případě, že $k = 2n+1$ máme

$$1-(-1)^k = 2.$$

Proto můžeme poslední vyjádření funkce $u(x,t)$ zjednodušit:

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}\,.$$

Příklad 13.4 (Fourierova metoda pro vlnovou rovnici) *Najděte řešení rovnice*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

$c \in \mathbb{R}$ *je nenulová konstanta, v oblasti, kde*

$$0 < x < l, \quad t > 0$$

za předpokladu, že

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, && (13.13)\\ u_t'(x,0) &= \psi(x), \quad 0 \le x \le l, && (13.14)\\ u(0,t) &= u(l,t) = 0, \quad t \ge 0. && (13.15) \end{aligned}$$

Řešení: Podmínkám (13.13), (13.14) říkáme počáteční (jsou formulovány pro počáteční moment jevu - čas $t = 0$) a podmínky (13.26) nazýváme okrajové (vyjadřují uchycení struny na obou koncích během celé doby trvání kmitů). Naším cílem je najít řešení úlohy použitím Fourierovy metody. Předpokládejme, že řešení lze nalézt ve tvaru

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t),$$

kde $X(x)$ a $T(t)$ jsou vhodné funkce proměnných x a t. Dosazením do vlnové rovnice dostaneme

$$X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0$$

nebo po úpravě

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda. \tag{13.16}$$

Z okrajových podmínek

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \;\; u(l,t) = X(l)T(t) = 0$$

vyplývá

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Proto funkce $X(x)$ vyhovuje okrajové úloze

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{13.17}$$

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{13.18}$$

Ukážeme, že okrajová úloha (13.17), (13.18) má netriviální řešení pouze tehdy, když $\lambda < 0$. Předpokládejme nejprve, že $\lambda > 0$. Potom charakteristická rovnice, příslušná homogenní diferenciální rovnici s konstantními koeficienty (13.17) je (hledaný kořen rovnice označíme ξ, neboť obvyklé písmeno λ již bylo použito)

$$\xi^2 - \lambda = 0 \tag{13.19}$$

a její kořeny jsou (bereme do úvahy $\lambda > 0$)

$$\xi_1 = \sqrt{\lambda}, \;\; \xi_2 = -\sqrt{\lambda}.$$

Obecné řešení rovnice (13.17) má tvar

$$X(x) = C_1 \, \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 \, \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x},$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Jejich volbu provedeme na základě okrajových podmínek (13.18):

$$x = 0 \Longrightarrow C_1 + C_2 = 0,$$

$$x = l \Longrightarrow C_1 \, \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 \, \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}l} = 0.$$

Z prvního vztahu máme $C_2 = -C_1$ a z druhého dostáváme

$$C_1 \left(\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda} l} - \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda} l} \right) = 0. \tag{13.20}$$

Protože pro každé $l > 0$ platí

$$\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda} l} \neq \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda} l}$$

(zdůvodněte proč) je vztah (13.21) splněn pouze tehdy, když $C_1 = C_2 = 0$. Tyto hodnoty vedou na triviální řešení okrajové úlohy (13.17), (13.18), které je však pro nás nezajímavé. Proto nemůže být $\lambda > 0$.

Předpokládejme tedy, že $\lambda < 0$. Za tohoto předpokladu má charakteristická rovnice (13.19) příslušná homogenní diferenciální rovnici s konstantními koeficienty (13.17) kořeny

$$\xi_1 = i\sqrt{|\lambda|}, \;\; \xi_2 = -i\sqrt{|\lambda|},$$

kde i je komplexní jednotka ($i^2 = -1$). Obecné řešení rovnice (13.17) má tvar

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{|\lambda|}x + C_2 \sin\sqrt{|\lambda|}x,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Jejich volbu opět provedeme na základě okrajových podmínek (13.18):

$$\begin{aligned} x = 0 &\Longrightarrow C_1 = 0, \\ x = l &\Longrightarrow C_2 \sin\sqrt{|\lambda|}l = 0. \end{aligned}$$

Z prvního vztahu máme $C_1 = 0$ a z druhého (opět považujeme možnost $C_2 = 0$ za nezajímavou)

$$\sin\sqrt{|\lambda|}l = 0 \tag{13.21}$$

odkud

$$\sqrt{|\lambda|}l = n\pi, \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

a

$$|\lambda| = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Posledním vztahem jsou fakticky určeny možné hodnoty čísla λ. Protože je jich nekonečně mnoho, budeme je indexovat a také budeme brát do úvahy, že to musí být záporná čísla. Proto

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \;\; n = 1, 2, \dots .$$

Uzavřeme zkoumání okrajové úlohy (13.17), (13.18) s tím, že má nekonečně mnoho různých netriviálních řešení tvaru

$$X_n(x) = a_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \;\; n = 1, 2, \dots$$

odpovídající hodnotám

$$\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \;\; , n = 1, 2, \dots . \tag{13.22}$$

Dosazením (13.22) do (13.16) dostáváme pro hledanou funkci T a pro každou hodnotu indexu $n = 1, 2, \dots$ obyčejnou diferenciální rovnici

$$T''(t) + \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 T(t) = 0,$$

která má obecné řešení (tentokrát vynecháme detaily jeho nalezení, typově je rovnice shodná s rovnicí (13.17))

$$T_n(t) = b_n^* \cos \frac{n\pi c}{l} t + c_n^* \sin \frac{n\pi c}{l} t$$

a b_n^*, c_n^* jsou libovolné konstanty. Proto jsou funkce

$$\begin{aligned} u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) &= \left(b_n^* \cos \frac{n\pi c}{l} t + c_n^* \sin \frac{n\pi c}{l} t\right) a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= \left(A_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi c}{l} t\right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{aligned}$$

kde jsme přeznačili $A_n = b_n^* a_n$ a $B_n = c_n^* a_n$ (nyní jsou A_n a B_n libovolnými konstantami) řešeními úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} =& c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le l, \ t > 0, \\ u(0,t) =& u(l,t) = 0, \quad t \ge 0, \end{aligned}$$

tj. řešeními výchozí úlohy ale bez počátečních podmínek (13.13), (13.14). Abychom našli řešení výchozí úlohy, které by vyhovovalo i těmto počátečním podmínkám budeme ho hledat ve tvaru

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi c}{l} t\right) \sin \frac{n\pi x}{l}\,. \tag{13.23}$$

Funkce (13.23) bude vyhovovat počátečním podmínkám, jestliže

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{13.24}$$

a dále

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{n\pi c}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{13.25}$$

Definujme na intervalu $[-l, l]$ liché funkce

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in [0, l], \\ -\varphi(-x) & x \in [-l, 0] \end{cases}$$

(ze zadání úlohy vyplývá, že $\varphi(0) = 0$ (zdůvodněte proč)) a

$$\psi^*(x) = \begin{cases} \psi(x) & x \in (0, l], \\ -\psi(-x) & x \in [-l, 0) \end{cases}$$

Rozviňme funkce $\varphi^*(x)$ a $\psi^*(x)$ do Fourierových řad podle vzorců pro rozvoje lichých funkcí, definovaných na intervalu $[-l, l]$, které jsou uvedeny v části 13.5. Protože na intervalu $[0, l]$ platí $\varphi(x) = \varphi^*(x)$ a na intervalu $(0, l]$ je $\psi(x) = \psi^*(x)$ můžeme Fourierovy řady zapsat takto

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in [0, l], \tag{13.26}$$

kde Fourierovy koeficienty b_n jsou

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \,\mathrm{d}x \tag{13.27}$$

a

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in (0, l], \tag{13.28}$$

kde Fourierovy koeficienty $\bar{b}_n$ jsou

$$\bar{b}_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \,\mathrm{d}x. \tag{13.29}$$

Dva rozvoje funkcí pro φ (rozvoje (13.24), (13.26)) a ψ (rozvoje (13.25), (13.28)) musí být stejné. Jejich porovnáním a užitím vztahů (13.27), (13.29) docházíme k závěru, že

$$A_n = b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \,\mathrm{d}x,$$

$$B_n = \frac{l}{n\pi c} \bar{b}_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení úlohy je zakončeno a jeho tvar, vyhovující všem počátečním a okrajovým podmínkám je

$$u(x,t) = \tag{13.30}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \,\mathrm{d}x \right) \cos \frac{n\pi ct}{l} + \left(\frac{2}{n\pi c} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \,\mathrm{d}x \right) \sin \frac{n\pi ct}{l} \right] \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Na závěr ještě učiníme poznámku o jednoznačnosti řešení. Lze dokázat, že pokud je funkce φ dvakrát spojitě diferencovatelná na $[0, l]$, $\varphi'''(x)$ je po částech spojitá, funkce ψ je spojitě diferencovatelná na $[0, l]$, $\psi''(x)$ je po částech spojitá a

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(l) = \varphi''(l) = 0,$$
$$\psi(0) = \psi(l) = 0,$$

pak je nalezené řešení (13.30) s uvedenými koeficienty jediným řešením formulované úlohy.

13.10 Cvičení

Příklad 10 *Kmitající struna je upevněna v bodech $x = 0$ a $x = l$, $l > 0$. V počáteční moment měla tvar lomené čáry*

$$u = \begin{cases} \dfrac{2h}{l} \cdot x & \text{jestliže} \quad 0 \le x \le \dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{2h}{l} \cdot (l - x) & \text{jestliže} \quad \dfrac{l}{2} \le x \le l. \end{cases}$$

Najděte profil struny za předpokladu, že platí podmínky (13.11) a $\psi(x) = 0$.

Řešení. Funkce $u(x,t)$ je dána součtem řady:

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\frac{8h}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{l} \cdot \cos \frac{\pi a t}{l} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{l} \cdot \cos \frac{3\pi a t}{l} \right. \\ &\left. + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi x}{l} \cdot \cos \frac{5\pi a t}{l} - \frac{1}{7^2} \sin \frac{7\pi x}{l} \cdot \cos \frac{7\pi a t}{l} + \cdots \right). \end{aligned}$$

Příklad 11 *Najděte řešení rovnice*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

za předpokladu, že

$$u|_{t=0} = x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -x.$$

Řešení. Daná úloha má řešení

$$u(x,t) = x(1-t).$$

Příklad 12 *Najděte řešení rovnice*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

za předpokladu, že

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos x.$$

Řešení. Daná úloha má řešení

$$u(x,t) = \frac{\cos x \sin at}{a}.$$

14 Rovnice vedení tepla a Laplaceova rovnice

14.1 Cíl kapitoly

Budeme pokračovat ve studiu parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Nyní budeme studovat některé rovnice parabolického a eliptického typu, které se často v aplikacích vyskytují - rovnici vedení tepla a Laplaceovu rovnici.
Ukážeme si jejich základní vlastnosti a také, jaké se kladou okrajové a počáteční podmínky, aby jimi bylo řešení určeno jednoznačně.
Řešení Laplaceovy rovnice budeme hledat Fourierovou metodou separace proměnných.

14.2 Rovnice vedení tepla

Teplota homogenního izotropního tělesa se dá popsat rovnicí

$$\frac{c\varrho}{k}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{14.1}$$

přičemž $u(x, y, z, t)$ označuje teplotu tělesa v bodě $[x, y, z]$ v době t, k je koeficient vodivosti tepla, c je specifické teplo a ϱ je hustota tělesa. Pokud si zavedeme substituci

$$\tau=\frac{k}{c\varrho},$$

potom se rovnice zjednoduší na tvar

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{14.2}$$

Řešením této rovnice prohlásíme každou funkci, která má spojité druhé parciální derivace podle proměnných x, y, z a spojitou první derivaci podle τ.
Pokud budeme předpokládat, že funkce u závisí pouze na jedné prostorové proměnné, dostaneme tzv. rovnici pro vedení tepla v tyči

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{14.3}$$

přitom pro jednoduchost jsme označili τ jako t.

14.3 Dirichletova úloha pro rovnice vedení tepla

V praxi jsou diskutované parciální rovnice řešeny za různých počátečních a okrajových podmínek. Velice častá je tzv. Dirichletova úloha. Nyní uvedeme jednu z jejich formulací: Najít řešení $u(x, t)$ rovnice (14.3), které je spojité pro $0 \le x \le l, t \ge 0$ a splňuje počáteční podmínku

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{14.4}$$

a okrajové podmínky

$$u(0, t) = \mu_1(t), \tag{14.5}$$

$$u(l, t) = \mu_2(t), \tag{14.6}$$

kde φ, μ_1, μ_2 jsou zadané funkce.

14.4 Princip maxima pro rovnici vedení tepla

Následující věta dává možnost vniknout do vlastností řešení rovnice (14.3).

Věta 14.1 *Jestliže $u(x,t)$ je řešením rovnice (14.3), které je spojité na uzavřené oblasti*

$$0 \leq x \leq l,$$
$$0 \leq t \leq T,$$

potom funkce u nabývá svého maxima buď pro $t = 0$, nebo pro x nebo pro $x = l$.

Fyzikální smysl principu maxima je zřejmý: teplota tyče je největší buď na začátku sledované doby (tj. $t = 0$) a nebo na krajích tyče. Stačí si uvědomit, že se tyč nikde nezahřívá a sledujeme jen vedení tepla. V případě zahřívání tyče by jsme museli pro popis použít rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{14.7}$$

kde funkce $f(x,t)$ je nezáporná a kladná aspoň pro některé hodnoty x a t.

14.5 Laplaceova rovnice

Budeme-li předpokládat, že výše studované parabolické rovnice popisují stacionární (na čase nezávislé) jevy, potom budou parciální derivace řešení podle času nulové a parabolické rovnice přejdou v rovnice eliptického typu. Nyní uvedeme často se vyskytující eliptické rovnice, nazývané Laplaceovými.
Laplaceova rovnice má v případě dvou nezávislých proměnných tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{14.8}$$

Často uvažujeme také Laplaceovu rovnici v případě, že hledaná funkce závisí na třech proměnných. Potom je její tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{14.9}$$

Obě rovnice (14.8) a (14.9) jsou rovnicemi eliptického typu. Často je zapisujeme ve tvaru

$$\Delta u = 0,$$

kde symbolem Δu rozumíme v případě rovnice (14.8) operátor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

a v případě rovnice (14.9)) operátor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Příklad 14.1 *Řešení Laplaceovy rovnice* $\Delta u = 0$ *pro* $u = u(x, y)$ *lze vyjádřit ve tvaru řady*

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sin(ix + \beta_i) \sinh(iy + \gamma_i),$$

kde $a_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$.

14.6 Fourierova metoda separace proměnných pro Laplaceovu rovnici

Také při řešení Laplaceových rovnic se používá metoda separace proměnných (Fourierova metoda) o které jsme již hovořili v části 13.5. Budeme její použití ilustrovat na příkladu.

Příklad 14.2 *Hledejme řešení Laplaceovy rovnice* $\Delta u = 0$ *pro* $u = u(x, y)$ *metodou separace proměnných.*

Řešení: Máme rovnici $\Delta u = 0$ a předpokládáme, že platí $u = u(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Potom po dosazení do Laplaceovy rovnice dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x)\psi(y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x)\psi(y)}{\partial y^2} = 0,$$

$$\psi(y)\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + \varphi(x)\frac{\partial^2 \psi(y)}{\partial y^2} = 0.$$

Budeme dále předpokládat, že funkce φ, ψ jsou nenulové, potom můžeme poslední rovnici vydělit jejich součinem. Příslušné parciální derivace budou obyčejnými derivacemi, protože jde o parciální derivování funkcí jedné proměnné. Dostaneme

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = 0.$$

V poslední rovnici máme na levé straně součet dvou činitelů, z nichž první závisí pouze na proměnné x a druhý pouze na proměnné y. Jejich součet se bude rovnat nule pouze v případě, že se oba sčítance rovnají konstantě s opačným znaménkem. Označme ji λ. Potom máme

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda, \quad \frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = -\lambda,$$

neboli

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x), \quad \psi''(y) = -\lambda\psi(y).$$

Tyto rovnice umíme řešit. Řešení zapíšeme ve tvaru ve tvaru

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{pro} \quad \lambda > 0, \\ Ax + B & \text{pro} \quad \lambda = 0, \\ A\mathrm{e}^{j\sqrt{-\lambda}x} + B\mathrm{e}^{-j\sqrt{-\lambda}x} & \text{pro} \quad \lambda < 0, \end{cases}$$

$$\psi_\lambda(y) = \begin{cases} Ce^{j\sqrt{\lambda}y} + De^{-j\sqrt{\lambda}y} & \text{pro} \quad \lambda > 0, \\ Cy + D & \text{pro} \quad \lambda = 0, \\ Ce^{\sqrt{-\lambda}y} + De^{-\sqrt{-\lambda}y} & \text{pro} \quad \lambda < 0. \end{cases}$$

Řešení lze také zapsat ve tvaru

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} \alpha \sinh(\sqrt{\lambda}x + \beta) & \text{pro} \quad \lambda > 0, \\ \alpha x + \beta & \text{pro} \quad \lambda = 0, \\ \alpha \sin(\sqrt{-\lambda}x + \beta) & \text{pro} \quad \lambda < 0, \end{cases}$$

$$\psi_\lambda(y) = \begin{cases} \gamma \sin(\sqrt{\lambda}y + \delta) & \text{pro} \quad \lambda > 0, \\ \gamma y + \delta & \text{pro} \quad \lambda = 0, \\ \gamma \sinh(\sqrt{-\lambda}y + \delta) & \text{pro} \quad \lambda < 0. \end{cases}$$

Integrační konstanty $A, B, C, D, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ závisí na veličině λ.
Z posledních vzorců mimo jiné plyne, že řešení dvojrozměrné Laplaceovy rovnice nemůže být současně periodické ve směru x a y. $\square$.

14.7 Shrnutí kapitoly

Pokračovali jsme ve studiu parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Věnovali jsme se rovnicím parabolického a eliptického typu = rovnici vedení tepla a Laplaceovu rovnici. Seznámili jsme se s jejich základními vlastnostmi. Ukázali jsme si jaké se používají okrajové a počáteční podmínky pro nalezení jednoznačného řešení dané úlohy.
Pro určení řešení Laplaceovy rovnice jsme použili Fourierovou metodou separace proměnných.

14.8 Řešené příklady

14.8.1 Fourierova metoda pro rovnici vedení tepla

Příklad 14.3 *Najděte řešení rovnice*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pro

$$0 < x < l, \quad t > 0$$

za předpokladu, že

$$\begin{aligned} u(x,0) =& \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) =& u(l,t) = 0, \quad t \ge 0. \end{aligned}$$

Řešení: Naším cílem je najít řešení úlohy použitím Fourierovy metody. Předpokládejme, že se proměnné dají rozdělit takto:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Dosazením do rovnice dostaneme

$$X(x)T'(t) - \alpha^2 X''(x)T(t) = 0$$

nebo po úpravě

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda. \tag{14.10}$$

Z okrajových podmínek

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \;\; u(l,t) = X(l)T(t) = 0$$

vyplývá, že

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Proto funkce $X(x)$ vyhovuje okrajové úloze

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{14.11}$$

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{14.12}$$

Funkce $T(t)$ vyhovuje rovnici

$$T'(t) - \lambda\alpha^2 T(t) = 0. \tag{14.13}$$

Hledáme takové hodnoty λ, které vedou k netriviálním řešením uvedené rovnice. Jsou možné následující tři případy:

(i) Nechť $\lambda = \beta^2$, $\beta > 0$. Pak má úloha (14.11) obecné řešení tvaru

$$X(x) = c_1 \exp(\beta x) + c_2 \exp(-\beta x).$$

Z okrajových podmínek (14.12) dostáváme

$$c_1 + c_2 = 0,$$
$$c_1 \exp(\beta l) + c_2 \exp(-\beta l) = 0.$$

Odtud máme $c_1 = c_2 = 0$. Proto je tento případ nezajímavý.

(ii) Nechť $\lambda = 0$. Pak má úloha (14.11) obecné řešení tvaru

$$X(x) = c_1 x + c_2.$$

Z okrajových podmínek (14.12) dostáváme

$$c_2 = 0,$$
$$c_1 l + c_2 = 0.$$

Odtud opět máme $c_1 = c_2 = 0$. Tento případ je proto také nezajímavý.

(iii) Nechť $\lambda = -\beta^2$, $\beta > 0$. Pak má úloha (14.11) obecné řešení tvaru

$$X(x) = c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x.$$

Z okrajových podmínek (14.12) dostáváme

$$\begin{aligned} &c_1 = 0, \\ &c_1 \cos \beta l + c_2 \sin \beta l = 0. \end{aligned}$$

Odtud máme

$$c_1 = 0, \quad \sin \beta l = 0.$$

Proto

$$\beta l = n\pi.$$

Uloha (14.11), (14.12) má netriviální řešení pouze v případě, když

$$\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad , n = 1, 2, \dots .$$

Toto řešení má tvar

$$X_n(x) = a_n \sin \frac{n\pi x}{l} .$$

Čísla λ_n nazýváme vlastními čísly a funkce $X_n(x)$ vlastními funkcemi. Řešení rovnice (14.13), ve které je položeno $\lambda = \lambda_n$ je

$$T_n(t) = b_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 t\right).$$

Proto jsou funkce

$$u_n(x,t) = A_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 t\right) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$$

řešeními úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} =&\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le l, \ t > 0, \\ u(0,t) =&u(l,t) = 0, \quad t \ge 0. \end{aligned}$$

Abychom našli řešení výchozí úlohy budeme její řešení hledat ve tvaru

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 t\right) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} . \tag{14.14}$$

Funkce (14.14) bude vyhovovat počátečním podmínkám, jestliže

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} , \quad 0 \le x \le l.$$

Rozvinutím funkce $\varphi(x)$ do Fourierovy řady dostaneme hodnoty koeficientů

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \ .$$

Na závěr ještě učiníme poznámku o jednoznačnosti řešení. Lze dokázat, že pokud je funkce φ spojitá na $[0,l]$, $\varphi'(x)$ je po částech spojitá a

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0,$$

pak je nalezené řešení (14.14) s uvedenými koeficienty jediným řešením formulované úlohy.

14.9 Cvičení

14.9.1 Fourierova úloha pro Laplaceovu rovnici

Příklad 13 *Najděte řešení rovnice*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

pro

$$0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

za předpokladu, že

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a, \\ u(0,y) &= g(y), \ \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = h(y), \quad 0 \le y \le b. \end{aligned}$$

Řešení. Funkce $u(x,y)$ je dána součtem $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$, kde

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\cosh\frac{n\pi x}{b} - \tanh\frac{n\pi a}{b}\sinh\frac{n\pi x}{b}\right)\sin\frac{n\pi y}{b}\,,$$

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\frac{n\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

a pro koeficienty platí

$$a_n = \frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}y,$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\cdot\frac{1}{\cosh\frac{n\pi a}{b}}\int_0^b h(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}y.$$

Příklad 14 *Najděte řešení rovnice*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

pro

$$0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$$

za předpokladu, že

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,\pi) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = \cos 3y.$$

Řešení. Řešení je dáno vztahem

$$u(x,y) = \frac{\cosh 3x}{3\sinh 3\pi} \cdot \cos 3y.$$

Příklad 15 *Najděte řešení rovnice*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

pro

$$0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$$

za předpokladu, že

$$u(0,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) + u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial x}(x,\pi) = \sin\frac{3x}{2}\,.$$

Řešení. Řešení je dáno vztahem

$$u(x,y) = \frac{3\cosh\dfrac{3y}{2} - 2\sinh\dfrac{3y}{2}}{3\cosh\dfrac{3\pi}{2} - 2\sinh\dfrac{3\pi}{2}} \cdot \cos 3y.$$

15 Metoda konečných diferencí pro PDR

15.1 Cíl kapitoly

V předchozích kapitolách jsme se seznámili s teorií parciálních diferenciálních rovnic prvního a druhého řádu a s některými analytickými metodami jejich řešení.
Nevýhodou analytického řešení je, že se nedá použít vždy. Existuje velmi široká třída rovnic, které neumíme analyticky řešit. V těchto případech musíme použít numerické metody řešení.
Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s možnosti numerického řešení některých typů parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu pomocí metody konečných diferencí.

15.2 Princip metoda konečných diferencí pro PDR

Vezměme si nejjednodušší případ: Mějme parciální lineární diferenciální rovnici eliptického typu

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sigma(x,y)u = f(x,y), \tag{15.1}$$

kde $u = u(x,y), \Omega = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}, \sigma(x,y) \ge 0\ \forall x,y \in \Omega,\ \sigma, f$ jsou spojité na Ω.
Nechť je splněna tzv. Dirichletova okrajová podmínka na hranicích oblasti Ω:

$$\begin{gathered} u(x,c) = p(x), \quad u(x,d) = q(x), \qquad a \le x \le b, \\ u(a,y) = r(y), \quad u(b,y) = s(y), \qquad c \le y \le d, \\ p(a) = r(c),\, p(b) = s(c),\ q(a) = r(d),\, q(b) = s(d). \end{gathered}$$

Poslední řádek nám zabezpečuje spojitost okrajových podmínek v „rozích“ oblasti Ω. Viz obrázek 15.1.
Vytvoříme síť na oblasti Ω (nejčastěji se používají čtvercové a nebo obdélníkové sítě).

$$x_i = a + ih, \quad i = 0,1,\ldots,n,n+1, \quad h = \frac{b-a}{n+1},$$

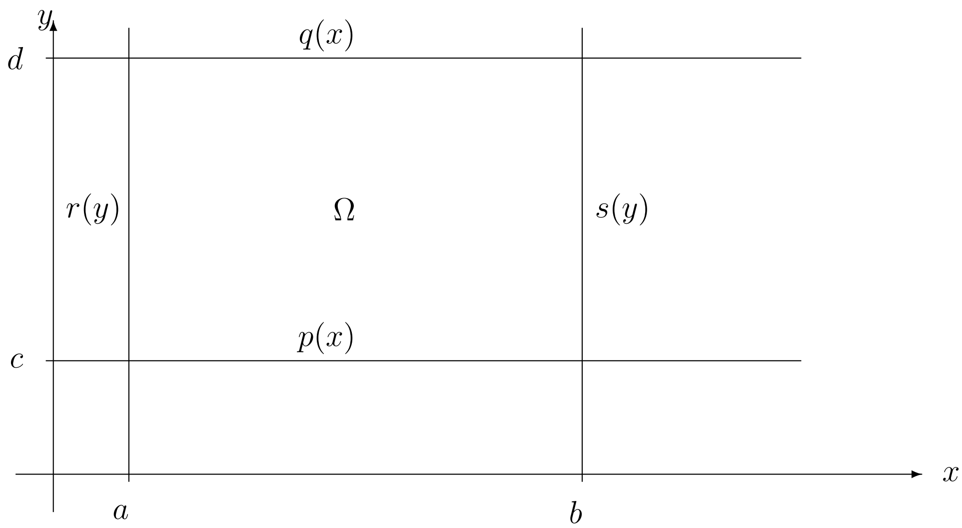
$$y_j = c + jk, \quad j = 0,1,\ldots,m,m+1, \quad k = \frac{d-c}{m+1}.$$

Uzly jsou pak body (x_i, y_j). Označme $u_{ij} = u(x_i, y_j)$. Za předpokladu, že platí

$$\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right| \le M_4, \quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right| \le M_4, M_4 \in \mathbb{R}, M_4 < \infty,$$

t.j. $u(x,y)$ je spojitá a má ohraničené parciální derivace do čtvrtého řádu včetně. Pak můžeme vyjádřit derivace pomocí diferencí a dostaneme

$$-\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial x^2} = -\left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_i, y_j)\right),$$



Obrázek 15.1: Metoda konečných diferencí

$$-\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial y^2} = -\left(\frac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{k^2} - \frac{k^2}{12}u^{(4)}(x_i,\eta_j)\right),$$

kde $x_{i-1} < \xi_i < x_{i+1}, \quad y_{j-1} < \eta_j < y_{j+1}$. Jestliže předpokládáme spojitost $u(x,y)$, pak pro dostatečně malé h,k můžeme zanedbat chybové funkce. Potom dosazením do (15.1) dostáváme pro $i = 1,2,\dots,n,\ j = 1,2,\dots,m$:

$$\frac{2u_{ij}-u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{2u_{ij}-u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{k^2} + \sigma_{ij}u_{ij} = f_{ij}.$$

Vynásobením této rovnice koeficientem hk dostaneme

$$\left(2\left(\frac{h}{k}+\frac{k}{h}\right)+hk\sigma_{ij}\right)u_{ij} - \frac{k}{h}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}) - \frac{h}{k}(u_{i,j+1}+u_{i,j-1}) = hkf_{ij}.$$

Dosadíme podle počátečních podmínek

$$u_{i,0}=p_i, \quad u_{i,m+1}=q_i, \quad u_{0,j}=r_j, \quad u_{n+1,j}=s_j,$$

kde $p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), r_j = r(y_j), s_j = s(y_j)$, dostaneme tak soustavu lineárních algebraických rovnic a po jejím vyřešení získáme hodnoty u_{ij}. V případě pravidelné čtvercové sítě, t.j. $h = k$, se tato soustava dále zjednoduší na tvar

$$\left(4+h^2\sigma_{ij}\right)u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = h^2 f_{ij}. \qquad (15.2)$$

Všimněte si, že matice soustavy je v obou případech pro $\sigma_{ij} \not\equiv 0$ diagonálně dominantní a proto můžeme použít i iterační metody řešení. V případě $\sigma_{ij} \equiv 0$ jde o soustavu, kde je diagonální dominantnost neostrá, ale je ostrá pro všechny rovnice, v nichž je aspoň jeden hraniční bod. Pro takovéto matice nám bude opět konvergovat Gauss-Seidelova

metoda, ale obecně dosti pomalu. Při větším počtu rovnic se vyplatí používat relaxační nebo superrelaxační Gauss-Seidelovu metodu, které nám podstatně zlepšují konvergenci a hlavně rychlost výpočtu. Zvláště v tomto případě, kdy matice koeficientů soustavy je řídká (t.j.obsahuje velké množství nulových prvků).
Analogický postup můžeme použít pro numerické řešení všech lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Postup řešení je vždy stejný: derivace nahradíme diferencemi a hledáme řešení soustavy lineárních algebraických rovnic.
Pro další parciální derivace se používají aproximace:

$$\frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j}-u_{ij}}{h}, \quad \frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k},$$

$$\frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial x} = \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h}, \quad \frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial y} = \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k},$$

$$\frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h}, \quad \frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2k}.$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial x \partial y} = \frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}-u_{i-1,j+1}+u_{i-1,j-1}}{2h2k}.$$

Problémy při řešení mohou vznikat, pokud oblast Ω není obdelníková.

Definice 15.1 *Bod $P_{ij} = (x_i, y_j)$ sítě na oblasti Ω nazveme vnitřním, jestliže všechny body úseček spojujících jej se sousedními body $P_{i\pm1,j}$, $P_{i,j\pm1}$ leží v Ω a nazveme jej hraničním v opačném případě.*

Pro určení hodnoty funkce u v hraničních bodech se nejčastěji používá lineární interpolace či extrapolace.
Nechť hraniční bod Q leží na spojnici uzlů $P_{ij}, P_{i+1,j}$, ve vzdálenosti δ od bodu P_{ij}. Nechť se hodnoty funkce u mění lineárně podél této spojnice. Potom

$$\frac{u(Q)-u(P_{ij})}{\delta} = \frac{u(P_{ij})-u(P_{i-1,j})}{h}.$$

Protože podle definice 12.6 můžeme psát $u(Q) = \varphi(Q)$ a dále $u(P_{ij}) = u_{ij}$, tak po úpravě dostaneme

$$\varphi(Q) = \left(1+\frac{\delta}{h}\right)u_{ij} - \frac{\delta}{h}u_{i-1,j}$$

a nebo

$$u_{ij} = \frac{h\varphi(Q)+\delta u_{i-1,j}}{h+\delta} = \frac{h}{h+\delta}\varphi(Q) + \frac{\delta}{h+\delta}u_{i-1,j},$$

protože známe hodnotu v bodě Q a potřebujeme dopočítat hodnotu v bodě P_{ij}.

Pro rovnice jiných typů je postup analogický. Vždy požadujeme, aby výsledná soustava lineárních algebraických rovnic byla jednoznačně řešitelná. Z této podmínky plynou i požadavky na tvar rovnice, které nám potom zaručí jednoznačnost a konvergenci řešení.

Postup si ukážeme na rovnici parabolického typu, půjde o zobecnění rovnice vedení tepla (14.3), kdy přidáme ještě další člen,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{15.3}$$

počáteční podmínka

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{15.4}$$

a okrajové podmínky

$$u(0,t) = \mu_1(t), \tag{15.5}$$

$$u(l,t) = \mu_2(t), \tag{15.6}$$

kde f, φ, μ_1, μ_2 jsou zadané spojité funkce, $x \in < 0, l >,\ t \in < 0, T >$.
Rozdělíme si interval $< 0, l >$ na n dílů délky $\Delta x = \frac{l}{n}$. Na ose t si zvolíme velikost kroku Δt tak, aby platilo $\Delta t = \varrho \Delta x^2$. Důvod bude zřejmý z dalšího výkladu. Derivace v rovnici (15.3) nahradíme diferencemi a dostaneme

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{\Delta x^2} + f(x_i t_k).$$

Nyní vynásobíme celou rovnici výrazem $\Delta t = \varrho \Delta x^2$ a dostaneme po úpravě

$$u_{i,k+1} = (1 - 2\varrho) u_{i,k} + \varrho(u_{i-1,k} + u_{i+1,k}) + \Delta t f(x_i, t_k). \tag{15.7}$$

Dosazením do počátečních a okrajových podmínek dostaneme

$$u_{i,0} = \varphi(x_i), u_{0,k} = \mu_1(t_k), u_{l,k}) = \mu_2(t_k). \tag{15.8}$$

Tím jsme získali soustavu lineárních algebraických rovnic. Pro její řešitelnost je třeba volit $\varrho \leq 1/2$. V opačném případě nastává numerická nestabilita a výpočet se bude výrazně lišit od skutečnosti.

15.3 Shrnutí kapitoly

Seznámili jsme se použití numerické metody konečných difertencí pro určení řešení některých typů parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu.
Základem metody je diskretizece proměnných, přičemž krok nemusí být na obou souřadnicových osách stejný. Místo spojitého řešení hledáme diskrétní funkci definovanou na konečném počtu bodů. Úloha nalézt řešení parciální diferenciální rovnice druhého řádu je převedena na úlohu nalézt řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Konstruke řešení nám zaručuje, že získaná soustava lineárních algebraických rovnic bude jednoznačně řešitelná. Získaná diskrétní funkce v limitě konverguje k přesnému řešení naší úlohy.

15.4 Řešený příklad

Příklad 15.1 *Metodou konečných diferencí řešte okrajovou úlohu*

$$u_{xx} + u_{yy} = 8x$$

$$u(x,0) = x^3, \quad u(0,y) = 0, \quad u(x,y)|_{x^2+y^2=10} = 10x(y+1),$$

kde oblast Ω *je vnitřní část čtvrtkruhu*

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 10.$$

Řešení: Rovnici si upravíme na stejný tvar jako (15.1)

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -8x.$$

Zvolme čtvercovou síť s krokem $h = 1$.Potom máme hraniční body

$$\begin{aligned} u(0,0) =& 0, u(1,0) = 1, u(2,0) = 8, u(3,0) = 27, \\ u(0,1) =& u(0,2) = u(0,3) = 0, \\ u(1,3) =& 40, u(3,1) = 60. \end{aligned}$$

Ještě potřebujeme znát hodnotu v bodě $P_{2,2}$. Protože je

$$Q = (2.449; 2),\ \varphi(Q) = 73.485,\ \delta = 0.449,$$

, lineární interpolací dostaneme

$$u_{2,2} = \frac{1 \cdot 73.485 + 0.449 \cdot u_{1,2}}{1 + 0.449} = 50.697 + 0.310 u_{1,2}.$$

Nyní pro 3 vnitřní uzly sestavíme síťové rovnice podle (15.2), přitom hraniční uzly jsou podtrženy.

$$\begin{aligned} 4u_{1,1} - \underline{u_{0,1}} - u_{2,1} - \underline{u_{1,0}} - u_{1,2} &= -8, \\ 4u_{1,2} - u_{1,1} - \underline{u_{1,3}} - \underline{u_{0,2}} - \underline{u_{2,2}} &= -8, \\ 4u_{2,1} - u_{1,1} - \underline{u_{3,1}} - \underline{u_{2,0}} - \underline{u_{2,2}} &= -16 \end{aligned}$$

a pak přidáním odvozeného vztahu pro $u_{2,2}$ dostaneme soustavu 4 rovnic o čtyřech neznámých. Po úpravě

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= \frac{1}{4}(0 + u_{2,1} + 1 + u_{1,2}) - \frac{1}{4}8, \\ u_{2,1} &= \frac{1}{4}(u_{1,1} + u_{2,2} + 60 + 8) - \frac{1}{4}16, \\ u_{1,2} &= \frac{1}{4}(0 + 40 + u_{1,1} + u_{2,2}) - \frac{1}{4}8, \\ u_{2,2} &= 50.697 + 0.310 u_{1,2}. \end{aligned}$$

Jejím řešením je pak

$$u_{1,1} = 12.384,$$
$$u_{2,1} = 30.768,$$
$$u_{1,2} = 25.768,$$
$$u_{2,2} = 58.688.$$

Další postup je pak obvyklý, t.j. zmenšíme krok a opakujeme výpočet až se nám odchylky v uzlových bodech ustálí.
Nechť je $h = 1/2$. Potom dostaneme síťové rovnice pro 19 vnitřních bodů a ještě musíme dopočítat hodnoty 5 hraničních uzlů lineární interpolací. Dostaneme tedy soustavu 24 rovnic o 24 neznámých. Přitom každá rovnice obsahuje nejvýše 5 nenulových hodnot proměnných.
Pro hraniční uzly máme

$$u_{6,1} = 37.651 + 0.196u_{5,1},$$
$$u_{5,3} = 44.388 + 0.223u_{4,3},$$
$$u_{4,4} = 38.717 + 0.473u_{3,4},$$
$$u_{3,5} = 36.196 + 0.446u_{2,5},$$

a pro poslední hodnotu bereme buď

$$u_{1,6} = \frac{1}{2}(u_{0,6} + u_{2,6}) = 20,$$

nebo si tuto hodnotu vypočítáme, přitom bereme sousední uzly po vertikále (doposud jsme je brali po horizontále), pak dostaneme rovnici

$$u_{1,6} = 16.567 + 0.196u_{1,5}.$$

Pro vnitřní uzly pak budeme mít soustavu

$$-4u_{11} + u_{01} + u_{10} + u_{21} + u_{12} = 1,$$
$$-4u_{12} + u_{02} + u_{11} + u_{22} + u_{13} = 1,$$
$$-4u_{13} + u_{03} + u_{12} + u_{23} + u_{14} = 1,$$
$$-4u_{14} + u_{04} + u_{13} + u_{24} + u_{15} = 1,$$
$$-4u_{15} + u_{05} + u_{14} + u_{25} + u_{16} = 1,$$
$$-4u_{21} + u_{11} + u_{20} + u_{31} + u_{22} = 2,$$
$$-4u_{22} + u_{12} + u_{21} + u_{32} + u_{23} = 2,$$
$$-4u_{23} + u_{13} + u_{22} + u_{33} + u_{24} = 2,$$
$$-4u_{24} + u_{14} + u_{23} + u_{34} + u_{25} = 2,$$
$$-4u_{25} + u_{15} + u_{24} + u_{35} + u_{26} = 2,$$

$$
\begin{aligned}
-4u_{31} + u_{21} + u_{30} + u_{41} + u_{32} &= 3,\\
-4u_{32} + u_{22} + u_{31} + u_{42} + u_{33} &= 3,\\
-4u_{33} + u_{23} + u_{32} + u_{43} + u_{34} &= 3,\\
-4u_{34} + u_{24} + u_{33} + u_{44} + u_{35} &= 3,\\
-4u_{41} + u_{31} + u_{40} + u_{51} + u_{42} &= 4,\\
-4u_{42} + u_{32} + u_{41} + u_{52} + u_{43} &= 4,\\
-4u_{43} + u_{33} + u_{42} + u_{53} + u_{44} &= 4,\\
-4u_{51} + u_{41} + u_{50} + u_{61} + u_{52} &= 5,\\
-4u_{52} + u_{42} + u_{51} + u_{62} + u_{53} &= 5.
\end{aligned}
$$

Tím máme celou soustavu hotovou a zbývá ji „jen“ vyřešit. □

15.5 Cvičení

Příklad 16 *Metodou konečných diferencí řešte okrajovou úlohu*

$$u_{xx} + u_{yy} = 8x$$

$$u(x,0) = x^2, \quad u(0,y) = 0, \quad u(x,y)|_{x^2+y^2=10} = 10x(y+1),$$

kde oblast Ω je vnitřní část čtvrtkruhu

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 9.$$

Řešení. Postupujte podobně jako v řešeném příkladu 15.1.

Příklad 17 *Co to jsou hraniční body sítě?*

Řešení. Tento pojem je uveden v definici 15.1.

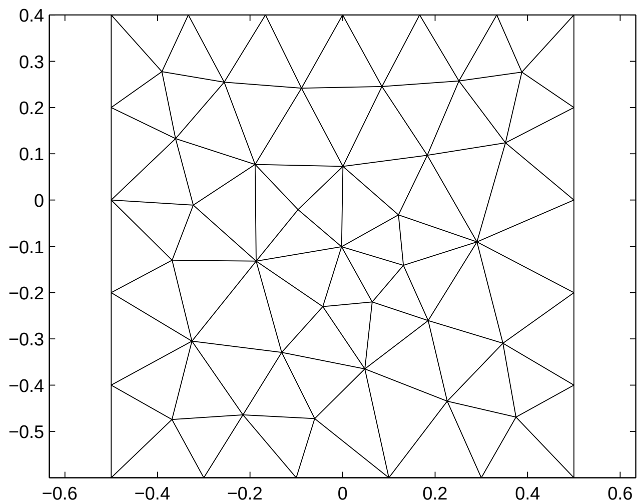
16 Metoda konečných prvků pro PDR - řešení pomocí Matlabu

16.1 Cíl kapitoly

Cílem této kapitoly je předvést, jak můžeme parciální diferenciální rovnice numericky řešit s použitím Matlabu. Matlab nepoužívá pro řešení PDR metodu konečných diferencí, popsanou v předchozí kapitole, nýbrž metodu konečných prvků, která je jednou z nejdůležitějších a nejpoužívanějších numerických metod pro řešení parciálních diferenciálních rovnic. Princip této metody zde bude nastíněn jen velmi, velmi zhruba, protože na podrobnější vysvětlení bohužel nemáme prostor.

16.2 Metoda konečných prvků

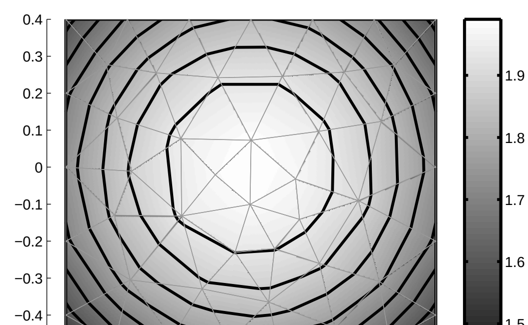
Metoda konečných prvků (MKP, anglicky FEM – „finite element method“) má mnoho společných rysů s metodou konečných diferencí (MKD). Opět hledáme řešení nějaké parciální diferenciální rovnice na zadané oblasti Ω. Matlab umožňuje řešit parciální diferenciální rovnice druhého řádu na rovinných oblastech (tj. hledaná funkce u závisí na prostorových proměnných x a y a případně na čase t), ale obecně lze metodou konečných prvků řešit i rovnice vyššího než druhého řádu a ve vyšších dimenzích než v rovině (ovšem už v třírozměrném prostoru se problém technicky velmi zkomplikuje). Všude dál v této kapitole budeme uvažovat pouze rovinné oblasti.
Stejně jako u metody konečných diferencí oblast Ω pokryjeme sítí. Na rozdíl od MKD se však v základní verzi metody konečných prvků používají trojúhelníkové sítě, viz obrázek 16.1. Říkáme, že **oblast Ω ztriangulujeme**. Na obrázku vidíme, že síť nemusí být nikterak pravidelná. Je však vhodné, aby jednotlivé trojúhelníky nebyly příliš „placaté“, tj. aby jejich vnitřní úhly nebyly příliš malé.
Výhodou trojúhelníkových sítí (oproti obdélníkovým, které se používají u MKD) je to, že mohou dobře vystihnout i velmi složité oblasti. Tím odpadají problémy s realizací okrajových podmínek, které jsme řešili u MKD (viz příklad 15.1).
Další analogie s metodou konečných diferencí je v tom, že **původní parciální diferenciální rovnici převedeme na soustavu algebraických rovnic** (lineárních či nelineárních, dle povahy původní úlohy) s neznámými $u_1, u_2, \ldots, u_n$, kde u_i je přibližná hodnota řešení v i-tém uzlu sítě a n je počet uzlů. Postup, jakým je tato soustava tzv. diskretizačních rovnic získána, je však zcela odlišný a daleko komplikovanější než u MKD a popisovat jej zde nebudeme. Soustavu diskretizačních rovnic vyřešíme – tím získáme hodnoty řešení v uzlových bodech – a za přibližné řešení rovnice na celé oblasti Ω bereme destičkovou plochu (což je prostorová analogie lomené čáry v rovině, viz obrázek 16.2) danou těmito hodnotami. To, že získáme řešení na celé oblasti, a nikoli jen v uzlech sítě, je další výhodou metody konečných prvků oproti MKD.
Pro ilustraci slouží obrázek 16.2, na kterém vidíme přibližné řešení rovnice $-\Delta u = 4$ na oblasti Ω z obrázku 16.1 s okrajovou podmínkou $u(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ na $\partial\Omega$. Snadno bychom ověřili, že přesným řešením této rovnice s touto okrajovou podmínkou je funkce $u(x, y) = 2 - x^2 - y^2$. Grafem řešení tedy je rotační paraboloid. Vidíme, že přibližné řešení



Obrázek 16.1: Triangulovaná oblast Ω

nalezené metodou konečných prvků tvarem paraboloidu vcelku odpovídá, pro přesnější srovnání bychom museli porovnat příslušné numerické hodnoty. Prostorový graf nemusí být ovšem zrovna nejpřehlednější, řešení se proto častěji znázorňuje pomocí vrstevnic, viz obrázek 16.3.

Obrázek 16.2: Graf přibližného řešení



Obrázek 16.3: Přibližné řešení téže rovnice znázorněné pomocí vrstevnic

16.3 Příklad řešený pomocí Matlabu

Poznámka 16.1 *Všem jazykovým puristům se omlouváme za to, že v dalším textu budeme do češtiny míchat různá anglická slova (a občas je ještě navíc potvořit skloňováním). Autoři z vlastní zkušenosti soudí, že v oblasti počítačových programů je příliš důsledný* *překlad do češtiny spíš na škodu věci.*

V Matlabu lze parciální diferenciální rovnice řešit velmi snadno, máme-li nainstalovaný tzv. PDE Toolbox (PDE = „partial differential equations“). Nejpohodlnější je pracovat s grafickým uživatelským rozhraním (GUI). Ukážeme zde řešení jednoho příkladu právě v tomto prostředí. Budeme řešit téměř totožný příklad, jako byl ten v předchozí kapitole (př. 15.1).

Příklad 16.1 *Pomocí Matlabu řešte metodou konečných prvků okrajovou úlohu*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8x \quad na\ \Omega, \tag{16.1}$$

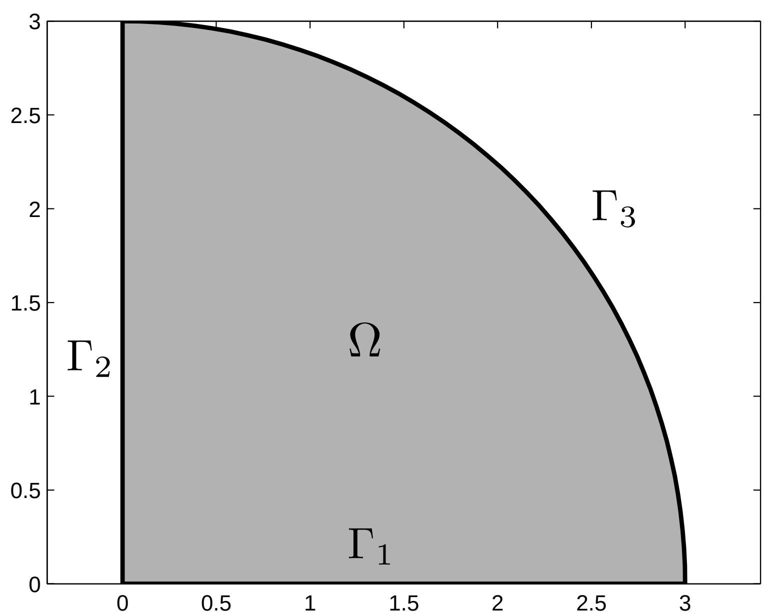
kde oblast Ω je čtvrtina kruhu se středem v počátku souřadné soustavy a poloměrem 3, která leží v prvním kvadrantu:

$$\Omega = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 9\},$$

s Dirichletovými okrajovými podmínkami

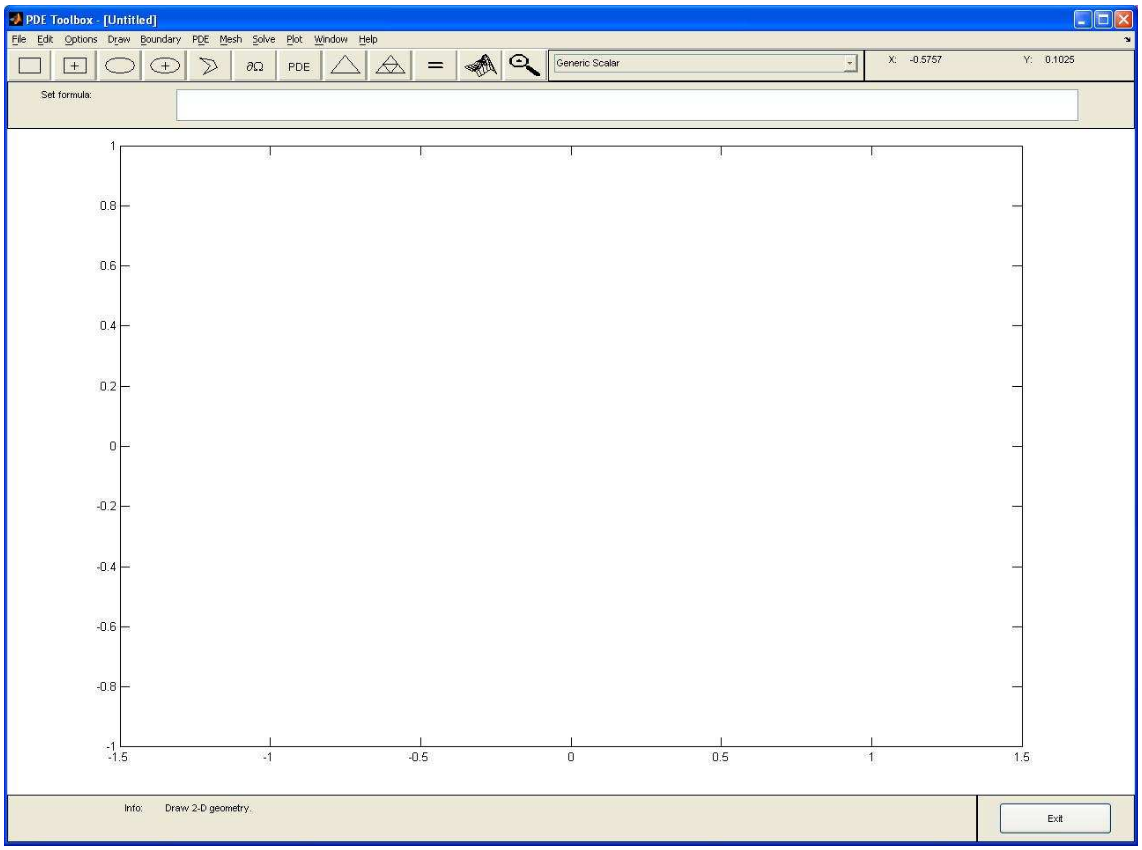
$$\begin{array}{rcll} u(x,y) & = & x^3 & na\ \Gamma_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3, y = 0\}, \\ u(x,y) & = & 0 & na\ \Gamma_2 = \{(x,y) : x = 0, 0 \leq y \leq 3\}, \\ u(x,y) & = & 9x(y+1) & na\ \Gamma_3 = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 9\}. \end{array} \tag{16.2}$$

Oblast Ω s vyznačenými částmi hranice Γ_1, Γ_2 a Γ_3 vidíme na obrázku 16.4.



Obrázek 16.4: K příkladu 16.1: Oblast Ω a její hranice, rozdělená na tři části

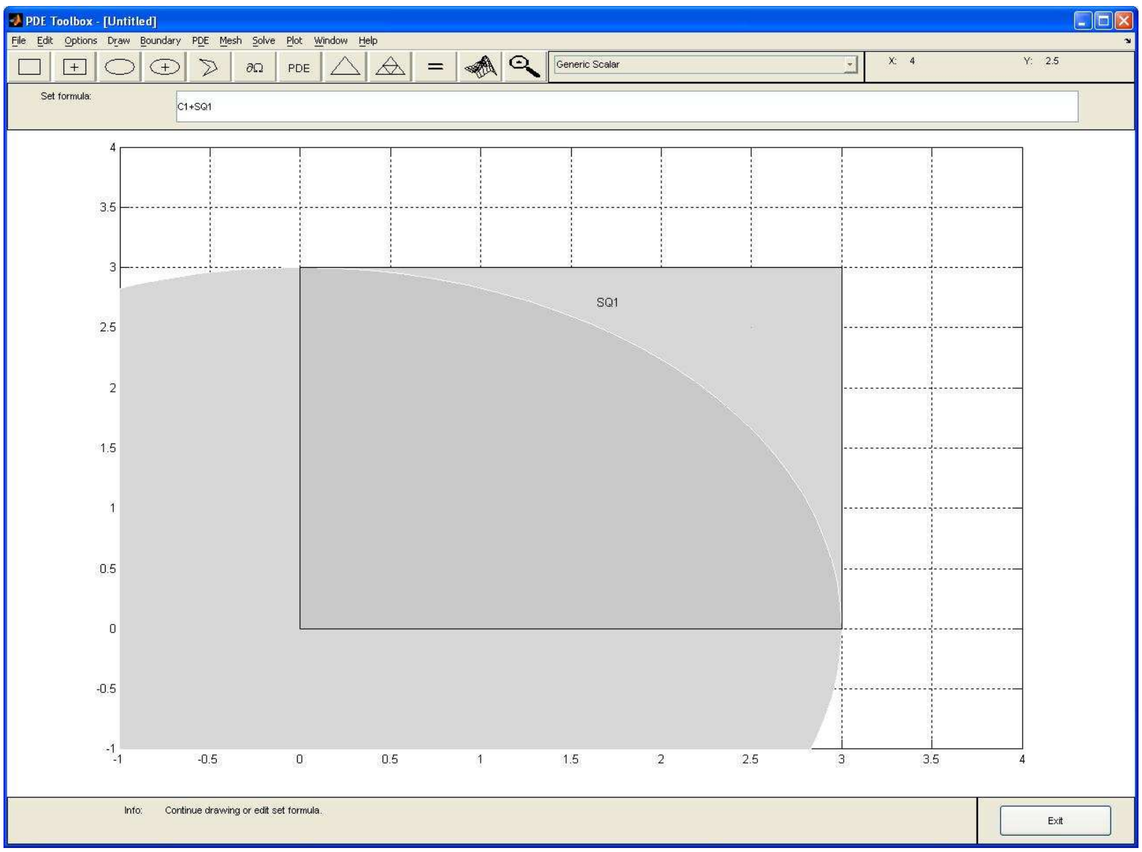
Řešení: Spustíme Matlab. Do příkazového okna napíšeme příkaz k otevření prostředí pro řešení parciálních diferenciálních rovnic:
`>> pdetool`
Otevře se následující okno



Řešení příkladu v tomto prostředí popíšeme krok za krokem. Každá akce, kterou je třeba provést, bude označena symbolem •.

Zadání oblasti Ω
Oblast, na které řešíme parciální diferenciální rovnici, můžeme zadat interaktivně. Na bílou plochu uprostřed můžeme umisťovat různé geometrické obrazce (obdélníky, kruhy, elipsy a polygony) a pak z nich pomocí množinových operací (sjednocení, průniku a rozdílu) sestavit požadovanou oblast. Naši oblast (čtvrtkruh) dostaneme jako průnik kruhu se středem v počátku a poloměrem 3 a čtverce, který má levý dolní vrchol v počátku a stranu o délce 3 (případně cokoli většího než 3).
Rozmezí os na ploše neodpovídá našim potřebám, a proto je musíme změnit:
• V menu v položce **Options** vybereme **Axis Limits. . .** a nastavíme správné rozmezí - pro náš příklad můžeme zadat pro obě osy např. meze -1 až 4.
Dále nastavíme, aby se ukazovala mřížka a aby se body, které budeme za chvíli klikáním zadávat (vrcholy čtverce a pod.) k mřížce přichytávaly.
• V **Options** klikneme na položku **Grid**.
• V **Options** klikneme na položku **Snap** („snap to grid“ = „přilnout k mřížce“).

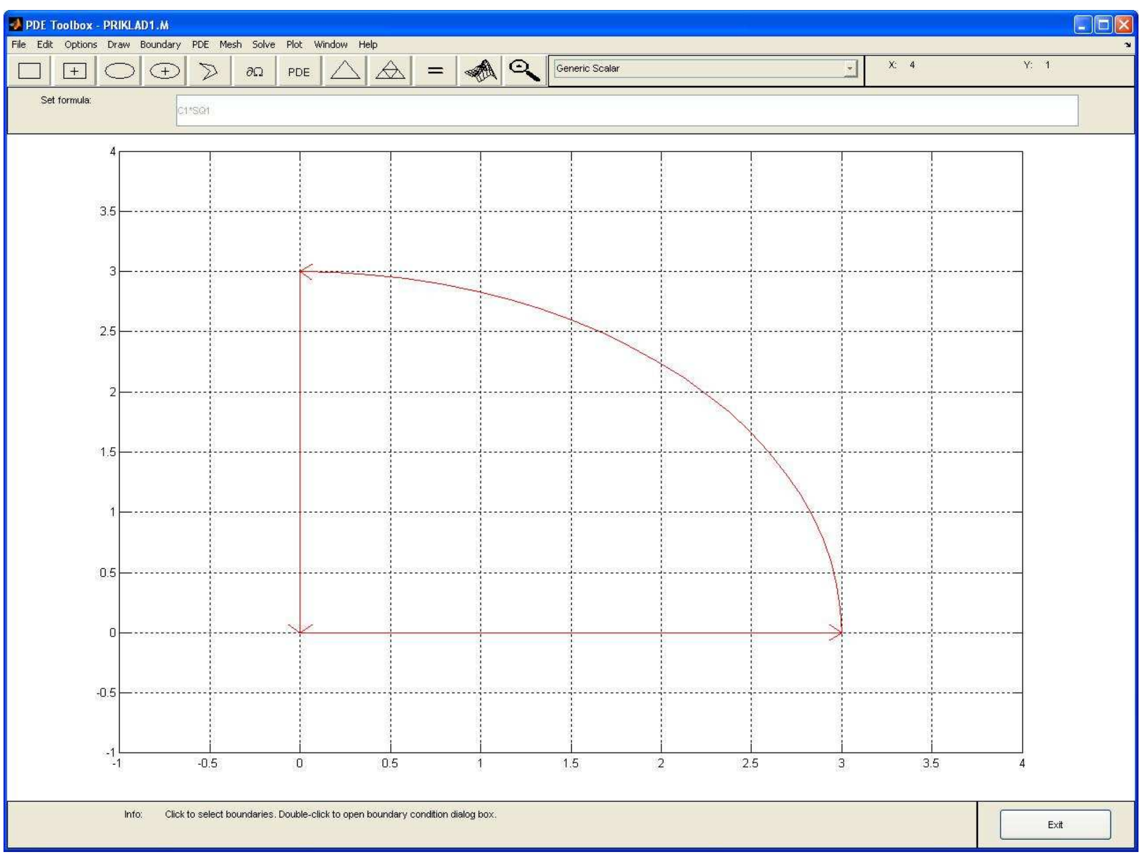
Nyní zadáme kruh:
• Klikneme na tlačítko se symbolem ⊕. Tím budeme zadávat elipsu, s tím, že první bod, na který klikneme, je jejím středem.
• Najedeme myší na bod $(0, 0)$, stiskneme tlačítko myši (díky tomu, že jsme zvolili „snap to grid“, se nemusíme trefit úplně přesně) a táhneme - objeví se obrys elipsy. Táhneme, až elipsu (v našem případě vlastně kruh) natáhneme do požadovaných rozměrů.
Podobným způsobem zadáme čtverec:
• Klikneme na tlačítko se symbolem □. Tím budeme zadávat obdélník.
• Opět najedeme na bod $(0, 0)$ (levý dolní roh čtverce) a dotáhneme kurzor do bodu $(3, 3)$ (pravý horní roh).
Výsledek by měl vypadat nějak takto:



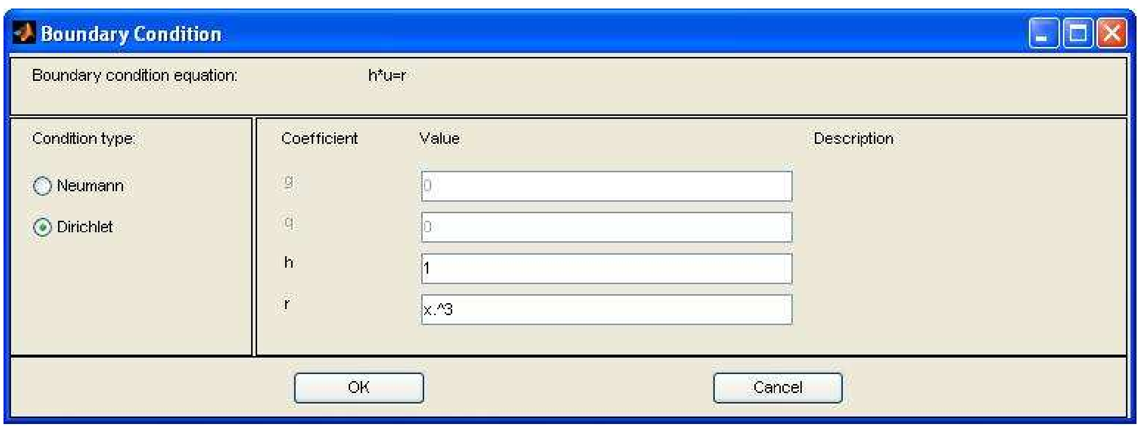
Kdybychom některý z objektů zadali jinak, než jsme chtěli, můžeme jej vcelku snadno opravit: Nejprve na požadovaný objekt klikneme a tím jej vybereme pro další úpravy (aktuálně vybraný objekt má černě zvýrazněnou hranici). Je-li nevhodně umístěn, ale velikost má přitom správnou, můžeme jej pomocí myši přetáhnout na jiné místo. Chceme-li změnit velikost, stačí, když na vybraný objekt „doublekliknem e“ (Jak je tohle správně česky? Poklepneme? Dvojklikneme?). Otevře se dialog, ve kterém můžeme změnit rozměry, umístění i název. Pokud jsme to zkazili úplně, můžeme vybraný objekt stisknutím klávesy Delete odstranit a začít znovu.
Zatím jsme jen zadali kruh a čtverec, ale nijak jsme počítači nesdělili, že nás zajímá jejich průnik. To provedeme nyní. Podíváme se na políčko nadepsané **Set formula**. Do

tohoto políčka zadáváme množinový vzorec („set“ má kromě mnoha jiných i význam „množina“, „formula“ snad překládat netřeba), pomocí něhož je z jednotlivých zadaných oblastí sestavena oblast výsledná. Můžeme používat operátory + (sjednocení), $*$ (průnik) a $-$ (množinový rozdíl). Při našem zadávání kruhu a čtverce se v poli Set formula automaticky objevil text C1+SQ1. Kdybychom to tak nechali, za oblast Ω by se vzalo sjednocení oblastí C1 (C jako „circle“ = kruh) a SQ1 (SQ jako „square“ - čtverec). My ale potřebujeme průnik, a proto
• změníme text v editačním poli **Set formula** na C1*SQ1. Navenek nepoznáme žádnou změnu, obrázek bude vypadat pořád stejně.
Nyní nastal vhodný okamžik pro uložení výdobytků naší práce.
• Uložíme rozpracovanou úlohu např. jako soubor priklad1.m (klasicky: v menu **File**, **Save as...**).
Můžeme se do uloženého souboru podívat, např. v editoru Matlabu nebo třeba v Poznámkovém bloku, jak kdo chce. Uvidíme, že Matlab automaticky vytvořil poměrně dlouhý soubor, v němž většině věcí nerozumíme, a proto do něj nebudeme vrtat.
Při další práci je vhodné čas od času úlohu opět uložit, dále již to zdůrazňovat nebudeme.

Zadání okrajových podmínek
Pokračujeme zadáním okrajových podmínek. Nejprve si necháme zobrazit hranici oblasti.
• Klikneme na tlačítko se symbolem $\partial\Omega$. (Jiná možnost: v menu **Boundary**, pak **Boundary Mode**.) Ukáže se nám hranice oblasti:



Postupně zadáme okrajové podmínky podle předpisů (16.2). Nejprve zadáme podmínku na vodorovné části hranice Γ_1 (viz též obrázek 16.4).
• Doubleklikneme na vodorovnou část hranice. Otevře se dialog pro zadávání okrajové podmínky. Jiná možnost: Na příslušnou část hranice klikneme (jednou). Tím bude tato část hranice vybrána pro další práci. Pak vybereme v menu **Boundary** a **Specify Boundary Conditions...**
V dialogu nyní zadáme okrajovou podmínku $u(x, y) = x^3$. V Matlabu lze zadávat dva základní druhy okrajových podmínek, Dirichletovy (je přímo zadáno, čemu se má řešení na hranici rovnat) a Neumannovy (které obsahují též derivaci řešení ve směru normály k hranici). Naše okrajové podmínky jsou Dirichletova typu.
• V dialogu proto vybereme (či spíš necháme nastaveno) **Condition type** na **Dirichlet**. Matlab očekává nyní podmínku ve tvaru (viz horní část dialogu) $h \cdot u = r$, kde h a r jsou zadané funkce, případně konstanty. Pro naši podmínku $u(x, y) = x^3$ je $h = 1$ a $r(x, y) = x^3$.
• V dialogu vyplníme kolonku pro funkci r výrazem `x.^3`. (Funkce h je na jedničku nastavená automaticky.) Vyplněný dialog by měl vypadat takto:



Podobným způsobem zadáme okrajové podmínky na ostatních částech hranice:
• Doubleklikneme na svislou část hranice. V dialogu zkontrolujeme, zda je zatržen Dirichletův typ okrajových podmínek a vyplníme kolonku pro funkci r výrazem `0`.
• Totéž provedeme pro obloukovou část hranice, tentokrát zadáme `9*x.*(y+1)`.

Zadání rovnice
Nyní zadáme samotnou parciální diferenciální rovnici, kterou chceme vyřešit.
• Klikneme na tlačítko **PDE** nebo v menu vybereme **PDE** a pak **PDE Specification...**
Otevře se dialog pro zadání rovnice. V levé části dialogu vybíráme typ rovnice - na výběr máme rovnici eliptickou, parabolickou, hyperbolickou a problém vlastních čísel. Naše rovnice (16.1) je typu eliptického, proto
• vybereme (případně jen zkontrolujeme, zda je vybrán) z možností pro **Type of PDE** typ **Elliptic**.
Rovnice je nyní očekávána (viz horní část dialogu) ve tvaru

$$-\mathrm{div}(c \cdot \mathrm{grad}\, u) + au = f \tag{16.3}$$

a po nás se chce, abychom doplnili funkce c, a a f. Doufáme, že tvarem (16.3) nejste příliš zaskočeni, pro jistotu však připomeňme, že je-li f funkce proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pak gradient funkce f je

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

a jsou-li $g_1, g_2, \ldots, g_n$ funkce proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pak divergence zobrazení $g = (g_1, \ldots, g_n)$ je

$$\operatorname{div} g = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial g_n}{\partial x_n}.$$

Též si snad pamatujete, že

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \Delta f.$$

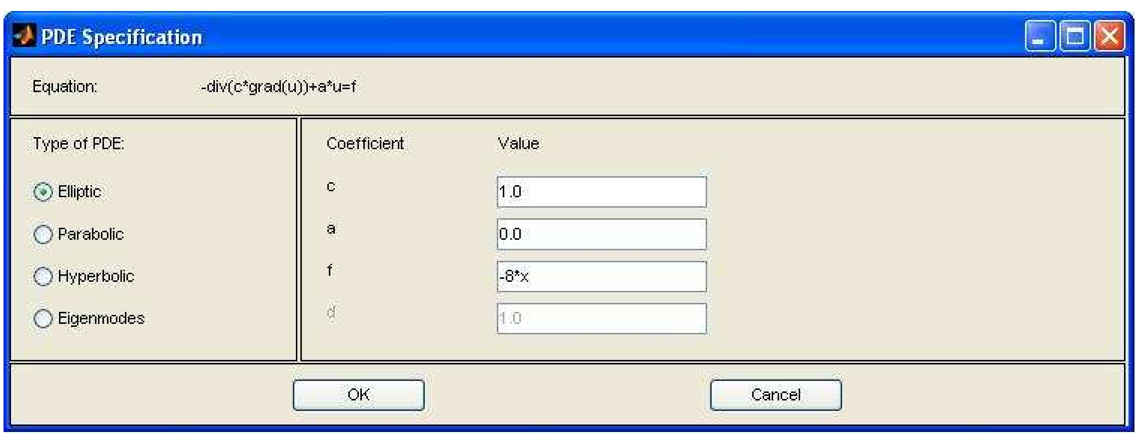
Řešená rovnice (16.1), tj. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8x$, po snadné úpravě $-\Delta u = -8x$, se tedy do tvaru (16.3) přepíše jako

$$-\operatorname{div}(1 \cdot \operatorname{grad} u) + 0 \cdot u = -8x.$$

Proto dialog pro zadání rovnice doplníme takto (některé z uvedených hodnot už tam možná jsou „samy od sebe“, pak je pochopitelně necháme být):

• Do kolonky pro funkci c doplníme konstantu `1`, do kolonky pro a napíšeme nulu a do kolonky pro f napíšeme `-8*x`.

Celá věc by pak měla vypadat následovně:



Triangulace oblasti

Oblast Ω ztriangulujeme:

• Klikněte na tlačítko s trojúhelníkem nebo v menu vyberte **Mesh** a pak **Initialize Mesh**

Chceme-li mít sít jemnější, můžeme

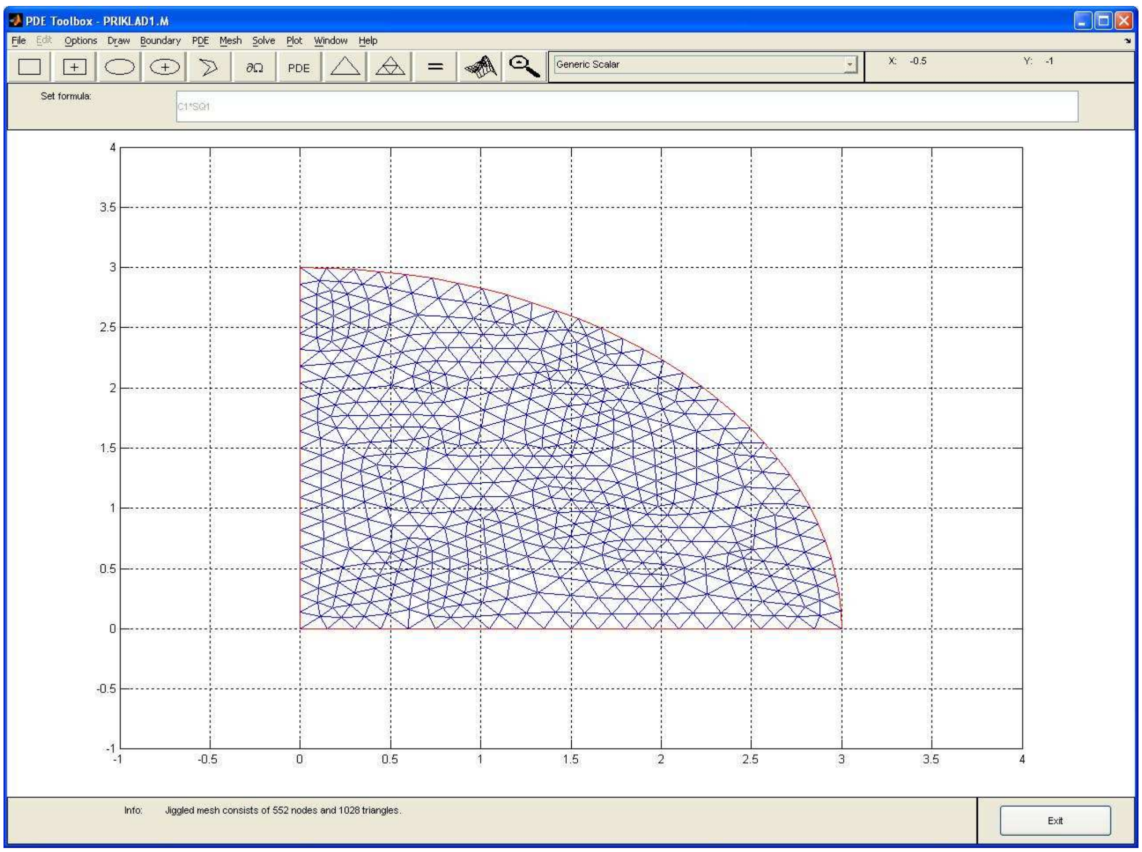
• kliknout na tlačítko s trojúhelníkem rozděleným na čtyři menší trojúhelníky nebo v menu vybrat **Mesh** a pak **Refine Mesh**.

Zjemněnou síť pak můžeme ještě poněkud vylepšit (zpravidelnit, odstranit z ní některé úzké trojúhelníky) pomocí funkce Jiggle. (Původní význam slova „jiggle“ je „pohupovat“ či „trhaně se pohybovat“, v souvislosti se sítí se tím myslí zhruba to, že uzly sítě se trošku popřemisťují, každý uzel se přesune do průměru svých sousedů.)

• Můžeme v menu vybrat **Mesh** a pak **Jiggle Mesh** - tuto operaci můžeme provádět i opakovaně.

Pokud se nám to, co se se sítí děje, nelíbí, můžeme úpravy brát zpět pomocí menu: Mesh, pak Undo Mesh Change. První návrh sítě můžeme ovlivnit pomocí nastavení parametrů (v menu Mesh, Parameters...). Zde můžeme např. nastavit maximální povolenou délku hrany (maximum edge size).

Jestliže jsme zjemnění a „jigglování“ provedli právě jednou, měli bychom mít na obrazovce toto:



Síť můžeme exportovat pro její případné další použití: v menu Mesh, pak Export Mesh.... Síť bude uložena pomocí tří matic, jejichž jména si můžeme vybrat. Matlab nám nabízí jména `p`, `e` a `t`. První matice bude obsahovat informace o uzlech sítě (points), druhá o hranách (edges) a třetí o trojúhelnících (triangles). S těmito maticemi pak v Matlabu můžeme dále pracovat dle potřeby, např. si jejich prvky můžeme nechat vypsat do souboru, který pak můžeme přenést a používat v jiném programu.

Řešení rovnice a jeho grafické znázornění

Teď když máme všechno připravené, můžeme konečně najít přibližné řešení rovnice.

• Klikneme na tlačítko s rovnítkem nebo v menu vybereme **Solve**, pak **Solve PDE**.
Řešení bude asi chvilku trvat (je nutno ne zcela jednoduchým způsobem sestavit a pak vyřešit systém zhruba 500 rovnic o 500 neznámých – pokud pracujeme se sítí, která je na předchozím obrázku). Až je počítač hotov, řešení se zobrazí pomocí dvourozměrného obrázku – hodnoty řešení na oblasti Ω jsou rozlišeny pomocí barev, vpravo máme zobrazenu stupnici (angl. colorbar), pomocí níž poznáme, jaká barva odpovídá jaké hodnotě řešení.
Chceme-li řešení exportovat pro další použití, uděláme to přes menu: Solve, pak Export Solution.... Řešení je uloženo ve formě vektoru (jméno si můžeme vybrat, automaticky se nabízí `u`), jehož složky jsou hodnoty řešení v jednotlivých uzlech sítě. Chceme-li s tímto řešením dále pracovat, případně je (přes soubor) přenést do nějakého jiného programu, musíme k němu samozřejmě mít i příslušnou síť, hlavně její uzly, jinak je zcela bezcenné.
Parametry zobrazení řešení můžeme měnit. Formulář pro nastavení parametrů se nám zobrazí po stisknutí tlačítka s 3-D grafem, případně se k němu dostaneme z menu: Plot, Parameters... Zde již necháme každému čtenáři prostor pro experimentování.

16.4 Cvičení

Příklad 18 *Pomocí Matlabu najděte přibližné řešení úlohy*

$$-\Delta u = 5\sin\left(10\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\right) \quad \text{na } \Omega,$$

kde Ω je část mezikruží o poloměrech $r = 1$, $R = 3$, která leží v prvním kvadrantu,

$$\Omega = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\},$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 0 \quad \text{na } \Gamma_1 = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 = 1\}, \\ u(x,y) &= 5 \quad \text{na } \Gamma_2 = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 = 9\}, \\ \vec{n}\cdot \mathrm{grad}\, u &= 0 \quad \text{na } \Gamma_3 = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 3, y = 0\} \text{ a } \Gamma_4 = \{(x,y) : x = 0, 1 \leq y \leq 3\}. \end{aligned}$$

Řešení. Spíše několik poznámek a tipů:
Pozor na okrajovou podmínku zadanou na Γ_3 a Γ_4. Symbolem $\cdot$ se zde nemyslí obyčejné násobení, ale skalární součin. Podmínka mohla být též zapsána jako $\partial u/\partial\vec{n} = 0$. Jedná se o homogenní Neumannovu okrajovou podmínku, které se též říká podmínka kolmosti. Až budete mít řešení, nechte si zobrazit vrstevnice (contours) a pokuste se odhadnout, proč se v souvislosti s touto podmínkou zmiňuje zrovna kolmost.
Při zadávání této podmínky si můžete všimnout, že v Matlabu bude očekáván tvar `n*c*grad(u)+qu=g`. Písmenem `n` se myslí normála $\vec{n}$, takže nezadáváme nic. Funkce c je tatáž jako v rovnici (viz (16.3)) a zadáme ji (nebo spíš necháme nastavenou na 1) až při zadávání rovnice. Jediné, co musíme zadat přímo zde, jsou funkce q a g.
Pravá strana rovnice je poněkud komplikovaná, ale není to ze zlomyslnosti, spíš k tomu vedla snaha o to, aby výsledný obrázek byl zajímavější než u řešeného příkladu. Pozor na správný zápis operátorů - nezapomeňte na patřičné místo napsat tečku. Funkce arctg se v Matlabu zadává jako `atan`, ne třeba arctan! Z toho, že zlomek y/x na části hranice oblasti Ω není definován, si nemusíte dělat hlavu - Matlab si s tím poradí, zvlášť, když se tento zlomek dále dosazuje do funkce arctg.

Značení

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{I}$	množina iracionálních čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$P_n(x)$	polynom n-tého stupně proměnné x
$A_{m,n}$	matice typu m, n (s m řádky a n sloupci)
$A = (a_{ij})$	matice s prvky a_{ij}
I	jednotková matice
$det\, A = \|A\|$	determinant matice A
A^{-1}	matice inverzní k matici A
$adj\, A$	matice adjungovaná k matici A
A_{ks}	algebraický doplněk prvku a_{ks}
$hod\,(A)$	hodnost matice A
$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$	vektorový prostor všech uspořádaných n-tic
$\bullet$	standartní skalární součin
$\\|x\\|$	norma vektoru x
$\\|A\\|$	norma matice A
$\square$	konec důkazu, konec řešení příkladu
$a \times b$	vektorový součin vektorů a, b
$A \times B$	kartézský součin množin A, B
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$	posloupnost prvků x_n
$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$	derivace funkce f podle x
$\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$	parciální derivace funkce f podle x
$\triangle$	Laplaceův operátor

Reference

[1] I.G. Aramanovič, G.L. Lunc, L.E. Elsgolc: *Funkcie komplexnej premennej, operátorový počet, teória stability,* Alfa, Bratislava, SNTL Praha, 1973.

[2] L. Bican: *Lineární algebra,* SNTL 1979, rozšířené vydání 2001.

[3] G. Birkhoff, T.C. Bartee: *Aplikovaná algebra,* Alfa, Bratislava 1981.

[4] G. Birkhoff, S. MacLane: *Algebra,* Alfa,Bratislava 1973.

[5] J. Diblík, J. Baštinec *Matematika IV,* Nakladatelství VUT v Brně, 1991. (skriptum)

[6] J. Diblík, A. Haluzíková, J. Baštinec: *Numerické metody a matematická statistika,* VUT Brno, 1987. (skriptum)

[7] J. Diblík, J., O. Přibyl: *Obyčejné diferenciálne rovnice,* FAST VUT, Akademické vydavatelství CERM, s. r. o. Brno, 2004. (skriptum)

[8] J. Diblík, M. Růžičková, *Obyčajné diferenciálne rovnice,* Edis - vydavatelstvo ŽU, Žilina, 2008.

[9] R. Černá, M. Machlický, J. Vogel, Č. Zlatník *Základy numerické matematiky a programování*, SNTL 1987, ISBN 978-80-8070-891-7.

[10] M. Demlová, J. Nagy: *Algebra,* MVŠT —III, SNTL 1982.

[11] L.E. Garner: *Calculus and analytic geometry*, London, 1988.

[12] F. Fabian, Z. Kluiber: *Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění*, Prospektrum, Praha, 1998.

[13] J. Franců: *Parciální diferenciální rovnice,* Akademické nakladatelství CERM s.r.o. Brno, 2003, ISBN 80-214-2334-X. (skriptum)

[14] M. Greguš, M. Švec, V. Šeda: *Obyčajné diferenciálne rovnice,* Alfa, Bratislava, SNTL, Praha, 1985.

[15] A. Haluzíková *Numerické metody,* Redakce VN MON VUT Brno, 1989. (skriptum)

[16] V. Havel,J. Holenda: *Lineární algebra,* SNTL 1984.

[17] Z. Horský: *Množiny a matematické struktury,* MVŠT — I, SNTL 1980.

[18] Z. Horský: *Vektorové prostory,* MVŠT — II, SNTL 1980.

[19] Z. Horský: *Diferenciální počet*, MVŠT - V., Praha 1982.

[20] B. Hrůza, H. Mrhačová: *Cvičení z algebry a geometrie,* VUT,1990.

[21] J. Hronec: *Diferenciálne rovnice I,* Slovenská akadémia vied, Bratislava, 1956.

[22] V. Jarník: *Diferenciální počet I, II*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1963.

[23] V. Jarník: *Integrální počet I, II*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1963.

[24] F. Jirásek, J. Benda, S. Čipera, M. Vacek: *Sbírka řešených příkladů z matematiky III,* SNTL, Praha, 1989.

[25] J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice,* MU Brno, PřF, 2001.

[26] P. Kaprálik, J. Tvarožek: *Zbierka riešených príkladov a úloh z lineárnej algebry a analytickej geometrie,* Alfa, Bratislava, 1987.

[27] I. Kluvánek, L. Mišík, M. Švec: *Matematika II,* Alfa, Bratislava, 1961.

[28] S. Koukal, M. Křížek, R. Potůček: *Fourierovy trigonometrické řady a metoda konečných prvků v komplexním oboru.* Academia,Praha, 2002, ISBN 80-200-1029-7.

[29] J. Kuben:*Obyčejné diferenciální rovnice,* VA Brno 2000.

[30] J. Kurzweil: *Obyčejné diferenciální rovnice,* SNTL Praha, 1978.

[31] G.I. Marčuk *Metody numerické matematiky,* Academia Praha 1987.

[32] M. Medveď: *Dynamické systémy,* VEDA, Bratislava, 1988.

[33] S. Míka: *Numerické metody algebry,* MVŠT — IV, SNTL 1982.

[34] J. Myslík: *Elektrické obvody,* BEN – technická literatura, Praha 1997.

[35] J. Nagy: *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic,* MVŠT IX, SNTL, Praha, 1978.

[36] J. Nagy: *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic,* MVŠT XV, SNTL, Praha, 1980.

[37] J. Nagy: *Stabilita řešení obyčejných diferenciálních rovnic,* MVŠT IX, SNTL, Praha, 1980.

[38] J. Nagy, E. Nováková, M. Vacek: *Integrální počet*, MVŠT - VI., Praha 1983.

[39] J. Nagy, E. Nováková, M. Vacek: *Vektorová analýza*, MVŠT - VIII., Praha 1984.

[40] M. Nekvinda, J. Šrubař, J. Vild *Úvod do numerické matematiky*, SNTL 1976.

[41] P. Pták: *Diferenciální rovnice, Laplaceova transformace,* ČVUT Praha 1999.

[42] P. Přikryl *Numerické metody matematické analýzy*, MVŠT — XXIV, SNTL 1985.

[43] M. Ráb: *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic,* MU Brno, PřF, 1998.

[44] T.Šalát: *Metrické priestory,* Alfa, Bratislava 1981.

[45] K. Rektorys a kol.: *Přehled užité matematiky,* SNTL Praha.

[46] K. Rektorys: *Obyčejné a parciální diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami,* ČVUT Praha, 2001, ISBN 80-01-01611-0. (skriptum)

[47] Z. Riečanová a kol. *Numerické metódy a matematická štátistika*, Alfa Bratislava 1987.

[48] R. Rychnovský, J. Výborná: *Parciální diferenciální rovnice a jejich některá řešení,* SNTL Praha, 1963.

[49] M.M. Smirnov: *Diferenciálnie uravnenija v častnych proizvodnych vtorovo porjadka*, Nauka, Moskva, 1964.

[50] M. Šikulová, Z. Karpíšek: *Matematika IV – Pravděpodobnost a matematická statistika*,VUT Brno, 1987. (skriptum)

[51] D. G. Zill: *A first course in differential equations*, Boston, 1992.

17 Poděkování

Na tomto místě chtějí autoři učebního textu poděkovat čtenářům, kteří nás upozornili na překlepy, chyby v textu či další nedostatky a tím přispěli k jeho zlepšení. Za tuto pomoc jim jsme velmi vděčni.

Poděkování patří:

1. Bc. Janu Cigánkovi
2. Bc. Tomáši Hillovi
3. Bc. Peterovi Korenčiakovi
4. Bc. Antonu Pausovi
5. Bc. Michalovi Starostovi
6. Bc. Pavlovi Ševčíkovi

Index